

BRUNO CARVALHO NEVES

UMA PROPOSTA PARA CONSTRUÇÃO DE ESPAÇO DE
HILBERT NA GRAVITAÇÃO QUÂNTICA VIA LAÇOS

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exigên-
cias do Programa de Pós-Graduação em
Física Aplicada, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

N518p
2012

Neves, Bruno Carvalho, 1987-

Uma proposta para construção de espaço de Hilbert na
gravitação quântica via laços / Bruno Carvalho Neves. –
Viçosa, MG, 2012.

xii, 90f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 86-90

1. Gravitação. 2. Relatividade geral (Física). 3. Mecânica
quântica. 4. Álgebra linear. 5. Física matemática.

I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 531.14

ברוך אתה יהוה אלהינו מלך העולם אשר נותן תורת־אמת
ובשורת־ישועה לעמו ישראל ולכל העמים עלידי בנו ישוע
המשיח אדוננו

Bendito sejas, Adonai, nosso Deus, Rei do Universo, que dás a Torah da verdade e as boas-novas da salvação a seu povo Yisra'el e a todos os povos mediante seu Filho Yeshua, o Messias, nosso Senhor.

À minha família e amigos.

“It is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature without some deep understanding of mathematics.”

Richard Feynman

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, dou graças a Adonai nosso D-us, o D-us de Avraham, Yitzchak e Ya'akov, o D-us de Israel, criador de todas as coisas e que nos mantestes vivos, preservaste-nos e nos fizeste chegar a este momento.

Gostaria de agradecer a todos os meus familiares que de maneira direta e indireta contribuíram com esse trabalho. Em especial, minha mãe Aparecida, meu pai José Aristides e meu irmão Thiago - por toda força, confiança e credibilidade ao longo do caminho.

À minha fiel companheira Gabriela, pessoa de inestimável valor em minha caminhada e desenvolvimento enquanto homem e cidadão. Obrigado por sua paciência e companhia durante essa senóide da nossa vida.

Encarecidamente, agradeço ao Rabbi Marcelo Miranda Guimarães, ao Rosh Matheus Zandona, ao Maestro Willsterman e a todos da sinagoga Har Tzion pelo apoio e oportunidade de tão boa convivência.

Ao professor Daniel Heber Theodoro Franco pela contínua orientação e aprimoramento dos conceitos fundamentais tanto científicos quanto de caráter humano. Ao professor José André Lourenço pelo apoio e direcionamento. A todos os professores e funcionários do DPF que contribuíram em minha formação, muito obrigado.

Gostaria de agradecer a todos os alunos da sala 213 da pós: Andrezão, pelas discussões e colaboração na Relatividade Geral, ao Rodrigo amigo desde o primeiro dia de aula em 2006. Ao Felipe Apôlonio por sua grande amizade, Fábio Fagundes

Nascimento por todo apoio e direcionamento. A Raniela, Angélica, Saimon, Anderson (companheiro), Júlio, Fabianão, Maurício. Obrigado pela convivência.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	x
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 Introdução e Motivação	1
2 Matemática da Relatividade Geral	4
2.1 Gravitação e Geometria	4
2.2 Geometria Riemanniana e Relatividade Geral	8
2.2.1 Tensor Métrico	8
2.2.2 Transporte Paralelo, Conexão e Derivação Covariante	11
2.2.3 Derivada Covariante de Campos Tensoriais	16
2.2.4 Conexão Métrica, Curvatura e Torção	17
2.2.5 Curvatura e Torção	21
2.2.6 Conexão de Levi-Civita e Equação de Einstein	25
3 Formalismo 3 + 1 da Gravitação	30
3.1 Geometria de Hipercírculos	31
3.1.1 Vetor Normal e Curvatura Extrínseca	34
3.1.2 Hipercírculos do Tipo-Espaço e Relação de Gauss-Codazzi	37
3.2 Geometria das Folheações	42

3.3	Decomposição 3 + 1 das Equações de Einstein	45
3.4	Formalismo Hamiltoniano (ADM) da Relatividade Geral	50
4	Gravitação Quântica via Laços e os Frames	53
4.1	Espaços Moduli e a Não-Separabilidade	53
4.1.1	Grafos e os Estados Quânticos	54
4.1.2	Espaços Moduli e a Estrutura de Nós	56
4.2	Teoria Elementar de Frames	58
5	Conclusão e Perspectivas	65
A	Cálculo em Variedades	66
A.1	Variedades	66
A.1.1	Cálculo em Variedades	69
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91

LISTA DE FIGURAS

2.1	Esboço da ação do princípio da equivalência.	6
2.2	Isomorfismo entre o espaço tangente e seu dual mediado pela métrica g_p	10
2.3	Cone de Luz e as denominações específicas dos vetores nas referidas inclinações.	11
2.4	Transporte de um vetor, por uma conexão, ao longo de um curva em M e, a absorção de informação sobre a curvatura da variedade.	14
2.5	Transporte paralelo de um vetor V_0 em p ao longo de dois caminhos. A curvatura mede a diferença entre os dois vetores.	23
2.6	O vetor $qr_2(sr_1)$ é o vetor ps (pq) trasportado paralelamente a $q(s)$. Em geral, $r_1 \neq r_2$ e a torção mede a diferença r_2r_1	25
3.1	Imersão Φ de uma variedade 3-dimensional em uma 4-dimensional M , definindo a hiperfície $\Sigma = \Phi(\bar{\Sigma})$	32
3.2	O mapeamento de Weingarten nos mostra o quanto o vetor normal varia ao longo de uma curva gerada por um vetor tangente a hiperfície: $\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}$	36
3.3	Plano Σ como uma hiperfície do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Observe que o vetor normal \mathbf{n} permanece constante ao longo de Σ ; isso implica que sua curvatura extrínseca é identicamente nula.	38
3.4	Cilindro Σ como uma hiperfície em \mathbb{R}^3 . Observe que o vetor normal \mathbf{n} varia ao longo de Σ em função da variação de φ	39

3.5	Ilustração da ação do projetor sobre um vetor em uma variedade M .	40
3.6	Superfície de Cauchy, uma ilustração de como curvas causais poderiam interseptá-la.	43
3.7	Folheação do espaço-tempo M por uma família de hiperfícies do tipo-espaço $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.	44
3.8	O ponto p' , obtido pelo ponto $p \in \Sigma_t$ por um deslocamento $\delta t \mathbf{m}$ pertencente a $\Sigma_{t+\delta t}$, isto é, a hiperfície Σ_t é transformada, evolui, em $\Sigma_{t+\delta t}$ por um campo vetorial (Arrasto de Lie “Lie dragging”).	45
3.9	Coordenadas (x^I) sobre a hiperfície Σ_t : cada linha $x^I = \text{const.}$ atravessa a folheação $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ e define o vetor tempo e o vetor desvio β .	48
4.1	Uma conexão de spin simples com dois nós trivalentes.	55
4.2	Representação da emergência dos espaços moduli ao considerarmos um ponto p em \mathbb{R}^3 possuindo vetores tangentes mais que necessários, isto é, nem todos são linearmente independentes.	58
A.1	Parametrização via coordenadas polares.	67
A.2	Um homeomorfismo φ_i levando U_i em um subconjunto aberto U'_i fornecendo coordenadas a um ponto $p \in U_i$.	68
A.3	Mapeamento $f : M \rightarrow N$ possuindo a representação em coordenadas ξ $\circ f \circ \varphi^{-1}$	70
A.4	Representação esquemática do processo de deformação via difeomorfismo.	71
A.5	Representação esquemática de uma curva em uma variedade m -dimensional.	72
A.6	Diferença entre vetores mediada por um transporte paralelo em \mathbb{R}^2 .	73
A.7	Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em sua representação em coordenadas.	74
A.8	Uma curva c e uma função f definem um vetor tangente ao longo dessa em termos da derivada direcional.	75
A.9	Um mapeamento $f : M \rightarrow N$ induz um mapeamento diferencial $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.	79
A.10	Processo de mapeamento induzido e seu respectivo <i>pullback</i> .	82

A.11 Um campo vetorial \mathbf{v} tangente a curvas, que são as linhas de fluxo do vetor \mathbf{v} . Em cada ponto p , o vetor $\mathbf{v}(p)$ é elemento do espaço tangente T_pM	83
A.12 Para compararmos um vetor $Y _x$ com um vetor, sob a mesma curva, $Y _{\sigma_\varepsilon(x)}$, o último deve ser transportado de volta ao ponto x pelo mapeamento $(\sigma_{-\varepsilon})_*$	90
A.13 A derivada de Lie $[X, Y]$ nos fornece informação sobre a quantidade que falta para fecharmos o paralelogramo.	90

RESUMO

NEVES, Bruno Carvalho, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Julho de 2012
Uma Proposta para a Construção de Espaços de Hilbert na Gravitacão Quântica via Laços. Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco. Co-orientadores: Afranio Rodrigues Pereira e Winder Alexander de Moura Melo.

Nosso trabalho é uma proposta para a construção do espaço de Hilbert Cinemático da Gravitacão Quântica via Laços, afim de recuperarmos a separabilidade por meio de uma ferramenta utilizada na análise de sinais. Utilizamos o formalismo de *frames* no intuito de remover a redundância das estruturas de *moduli* em grafos de alta valência, sem recorrermos a extensão do conjunto de difeomorfismos.

ABSTRACT

NEVES, Bruno Carvalho, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2012 **A Proposal for Construction of Hilbert Space in Loop Quantum Gravity.** Adviser: Daniel Heber Theodoro Franco. Co-advisers: Afranio Rodrigues Pereira and Winder Alexander de Moura Melo.

Our work is a proposal for a construction of the Kinematic Hilbert Space of Loop Quantum Gravity, in order to recover the separability through a tool used in signal analysis. We use the formalism of frames in order to remove the redundancy of the moduli structures in high valence graphs, without resorting to set extension of diffeomorphism.

Capítulo 1

Introdução e Motivação

O espaço e o tempo prendem a imaginação mais do que qualquer outro tema científico. Eles compõem o cenário da realidade, é a verdadeira fonte de inspiração na busca de um entendimento do caráter fenomenológico da Natureza. Toda nossa existência, tudo o que fazemos, pensamos e vivenciamos, ocorre em alguma região do espaço durante um determinado intervalo de tempo. Entretanto, a ciência ainda busca compreender o que são, na verdade, o espaço e o tempo. Serão eles entidades físicas reais ou simplesmente abstrações úteis? Se forem reais, serão elementares ou terão componentes ainda mais fundamentais? Essas são algumas perguntas que ainda pairam na mente dos pesquisadores. Espaço e tempo tomaram e ainda toma lugar nas discussões no que tange a relevância de uma melhor compreensão da Natureza e tem tido transformações e adquirido características distintas ao longo dos séculos.

Com o advento da Mecânica Quântica, abriu-se um novo horizonte rumo a uma melhor compreensão dos fenômenos que governam o nosso mundo. Um novo cenário foi estabelecido onde o determinismo, antes considerado um axioma na física, foi rompido dando lugar a um mundo onde em sua essência reina a probabilidade e incerteza. Por outro lado, uma nova teoria começou a mudar nosso entendimento do espaço-tempo. A Relatividade Especial estabeleceu uma nova compreensão do espaço-tempo, carregando em si um princípio fundamental: a causalidade. Alguns anos mais tarde Einstein publica sua nova teoria onde novamente muda nossa compreensão do universo, agora no que diz respeito à “Gravitação”. Surge, então, a Relatividade Geral,

1.Introdução

onde o espaço-tempo adquire dinâmica e se curva na presença de Matéria-Energia. Com efeito, a Relatividade Geral traz uma equivalência entre Geometria e Matéria-Energia, isto é, matéria-energia “diz” ao espaço-tempo como se curvar e espaço-tempo “diz” a matéria-energia como se mover.

A unificação entre Mecânica Quântica e Relatividade Especial deu origem ao que conhecemos como Teoria Quântica de Campos e Partículas. O sucesso obtido por essa teoria se traduz pela Eletrodinâmica Quântica, onde temos a maior precisão entre teoria-experimento em física. Acreditamos que o universo é composto por quatro interações fundamentais: Eletromagnética, Fraca, Forte e Gravitacional. Todas as interações fundamentais se mostraram coerentes com a Teoria Quântica de Campos exceto a Gravitação. A busca por uma teoria quântica que descreve a interação gravitacional tem desafiado por décadas a comunidade científica. Tentativas têm sido feitas em busca de uma teoria da Gravitação Quântica. Um dos modelos propostos, conhecido como Teoria das Supercordas, pretende dar uma descrição quântica e unificada para todas as interações. Entretanto, traz consigo muitas outras dificuldades, tais como, dimensões extras, problemas na compactificação das dimensões (Variedades de Calabi-Yau), a dependência do plano de fundo (espaço-tempo) e etc.

Alternativamente, temos a Gravitação Quântica via Laços que é uma proposta para uma teoria quântica da Relatividade Geral, sem levar em conta o “velho” sonho de uma teoria unificada. O enfoque na gravitação de laços é completamente diferente, partimos de uma Variedade Espaço-temporal M , globalmente hiperbólica, onde podemos executar os processos de Folheação decompondo nosso espaço-tempo em uma hipersuperfície (Cauchy) tipo-espaço mais o tempo, ou seja, $M = \mathbb{R} \times \Sigma$. De posse do formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral, podemos construir a partir das equações de Gauss-Codazzi e, de um ferramental de projeção das grandezas tensoriais fundamentais, uma aproximação para a ação de Einstein-Hilbert [3,37,38]. Como nosso intuito é uma teoria quântica, o objetivo é obtermos o formalismo hamiltoniano e a seguir utilizarmos o processo de quantização canônica [48,49]. No caso da gravitação via laços, existe um algoritmo para quantização canônica, implementado por Dirac [48], que produz a álgebra necessária.

1.Introdução

Esse trabalho, longe de ser uma revisão completa do formalismo da gravitação quântica, possui como eixo temático o problema da *separabilidade* do espaço de Hilbert Cinemático [49–51]. O problema surge basicamente quando temos grafos [49, 50] de alta valência nos *nós*, ou seja, cada grafo possui pontos de intersecção e, o estudo desses pontos, quando possuem alta valência, gera uma estrutura de *moduli*, no que tange ao conjunto de difeomorfismos não estendido que, advém da invariância sob tais transformações na Relatividade Geral. Em outras palavras, quando temos *nós* que possuem valência de modo que os vetores tangentes às curvas que chegam ao ponto considerado, são em quantidade que produz um conjunto mais que completo, ou seja, existem vetores que são linearmente dependentes o conjunto se torna redundante.

A nossa proposta é utilizar o ferramental do estudo de análise de sinais, a saber, bases generalizadas ou, simplesmente *frames*, de modo a produzir uma filtragem dos elementos redundantes e recuperar a separabilidade sem recorrer à extensão do conjunto de difeomorfismos. No capítulo 2, a seguir, faremos uma revisão sobre os aspectos introdutórios da Geometria Riemanniana e Relatividade Geral. No capítulo 3 introduzimos o formalismo ADM da Relatividade Geral, como sendo um pano de fundo para a construção da quantização canônica. No capítulo 4, apresentamos o problema que desejamos atacar e o respectivo formalismo de *frames* como uma proposta para eliminar a redundância do espaço de Hilbert \mathcal{H}_{Diff} . Um apêndice sobre os rudimentos do cálculo em variedades é apresentado como uma base, matematicamente rigorosa, para a Relatividade Geral. Muito trabalho ainda precisa ser feito afim de obtermos conclusões estáveis mas, uma jornada sempre começa com o primeiro passo.

Capítulo 2

Matemática da Relatividade Geral

2.1 Gravitação e Geometria

Dentre todas as interações que conhecemos a Gravitação assume um papel protagonista no nosso cotidiano. Os aspectos que trouxeram inspiração aos primórdios das descobertas astronômicas, bem como seu funcionamento, se vinculam intimamente à gravitação. No contexto da Relatividade Geral, seu caráter especial emerge do fato de que o campo dinâmico, que caracteriza a interação gravitacional, é o tensor métrico responsável por descrever a curvatura do espaço-tempo. Esse comportamento vai de encontro à idéia, proto-newtoniana, de um campo adicional que se propaga no tecido do espaço-tempo; essa foi a grande inspiração de Einstein. O princípio físico que guiou Einstein foi a *universalidade* da interação gravitacional, como descrito pelo **Princípio da Equivalência**. Vejamos como esse princípio nos leva a descrever a gravidade como uma manifestação efetivamente geométrica [3, 13–15].

O Princípio da Equivalência possui uma variedade de formas, o primeiro deles é conhecido como **Princípio da Equivalência Fraco** (PEF). O PEF diz, basicamente, que a massa inercial e gravitacional de qualquer objeto deve ser a mesma. Existe uma grande diferença conceitual entre esses dois tipos de massas consideradas. A massa inercial, utilizada nas equações dinâmicas de Newton, diz respeito a dificuldade e/ou resistência que um objeto produz no que tange a tentativa de variação do seu estado de movimento, por intermédio de uma força. Com efeito, a segunda lei de Newton

2. Geometria Riemmaniana

relaciona a força exercida sobre um objeto e a respectiva aceleração alcançada por este

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \quad (2.1)$$

Por outro lado, temos a lei de gravitação universal de Newton, que poderia ser vista como a propriedade dos corpos de atraírem uns aos outros. O campo de interação, o mediador da força, é produzido pela propriedade de massa gravitacional, ou melhor, produzido por uma “carga” gravitacional. A força é, então, proporcional ao gradiente de um campo escalar Φ , conhecido como potencial gravitacional:

$$\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \Phi \quad (2.2)$$

Percebemos a grande diferença conceitual e de aplicabilidade das massas gravitacional m_g e inercial m_i . Contudo, Galileu observou que a resposta da matéria à gravitação é universal, em outras palavras, a gravitação nos mostra ser a interação mais “democrática” que existe, não distingue tamanho, quantidade nem forma. Ela age da mesma maneira com toda matéria. Todo objeto cai com a mesma taxa de variação da velocidade em um campo gravitacional (no caso da Terra $9,8 \text{ m/s}^2$), independentemente de sua composição. Na mecânica newtoniana isso é expresso pelo PEF, que simplesmente nos diz

$$m_i = m_g \quad (2.3)$$

Uma consequência imediata desse tipo de comportamento é que a queda livre é universal, independente de sua massa, donde obtemos:

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi. \quad (2.4)$$

O Princípio da Equivalência Fraco possui uma implicação que pode ser colocada da seguinte maneira: *Não há maneiras de se distinguir os efeitos de um campo gravitacional dos efeitos de um referencial que se move com aceleração uniforme, simplesmente observando o comportamento de partículas em queda livre.* Imagine, por exemplo, que um físico esteja em uma espaçonave em uma região longe o bastante de

2. Geometria Riemmaniana

quaisquer influência gravitacional. Considere ainda que o observador não consiga visualizar onde ele se encontra. Se a espaçonave estiver em repouso todos os instrumentos de medida, bem como o próprio observador, estarão flutuando em um ambiente “sem” gravidade. Se em um dado instante, a espaçonave começa a acelerar em uma determinada direção a uma taxa de $9,8 \text{ m/s}^2$, o observador estará “caindo” na direção oposta à aceleração. No momento que tocar o solo da espaçonave, não tem como distinguir se ele está em repouso, na superfície da Terra, ou se está de maneira cooperativa com uma nave que acelera em uma região pequena do espaço sem influência gravitacional.

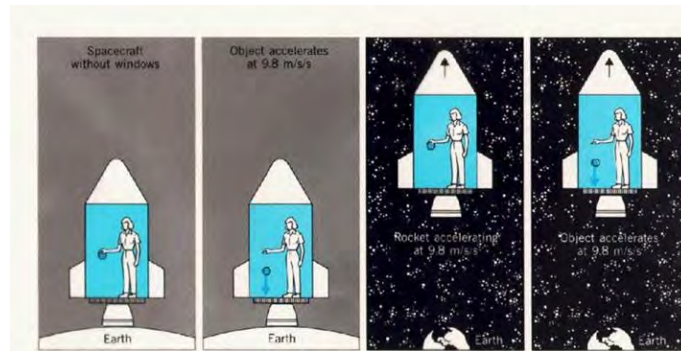


Figura 2.1: Esboço da ação do princípio da equivalência.

Podemos perceber que o princípio da equivalência fraco não diz respeito às demais interações existentes como, por exemplo, a Eletrodinâmica. As descobertas e pesquisas no ramo da eletricidade e magnetismo foram de certa forma espetaculares no âmbito da capacidade do homem em criar e avaliar modelos que descrevem o comportamento do cosmo. Faraday, Maxwell, entre outros, observaram o comportamento singular do que chamamos de Eletromagnetismo. Entretanto, a relatividade do movimento galileana, que se mostrava compatível com toda Mecânica Clássica, estava sendo uma “pedra” no caminho da Teoria Eletromagnética. As equações de Maxwell se mostravam incoerentes às transformações de referencial feitas pela transformada de Galileu.

As observações experimentais corroboravam com a teoria eletromagnética, porém, coube a Einstein abrir mão do dogmatismo newtoniano, presente na comunidade científica da época, e propor algo revolucionário sobre o nosso entendimento de espaço e tempo. A partir dos trabalhos de Lorentz, sobre transformações lineares de co-

2. Geometria Riemmaniana

ordenadas, Einstein percebeu que estas levavam a uma covariância perfeita para o Eletromagnetismo. Contudo, deveríamos abrir mão da compreensão de espaço e tempo absolutos e olharmos para uma grande fusão entre espaço e tempo (como enfatizado por Minkowski) formando a malha ou o tecido do espaço-tempo, onde todos os eventos tomam lugar. Com o advento da Relatividade Especial, o conceito de massa perdeu sua unicidade, passando a se mostrar como uma manifestação de energia e momentum. Einstein mostrou que matéria e energia eram, na verdade, duas faces de uma mesma moeda e, para um referencial em repouso, elas se relacionam pelo quadrado da velocidade da luz ($E = m c^2$). Pareceu natural para Einstein, então, generalizar o PEF para o princípio que ficou conhecido como **Princípio da Equivalência de Einstein**: *Em regiões pequenas o suficiente do espaço-tempo, as leis da física se reduzem as da relatividade especial; é impossível detectar a existência de campo gravitacional através de experimentos locais.* No contexto da relatividade especial e, levando-se em conta a equivalência entre aceleração e campo gravitacional, automaticamente Einstein percebeu que um feixe luminoso atravessando digamos, a espaçonave do exemplo citado acima, para o observador que se move aceleradamente, a luz pareceria se mover em uma trajetória *curva*. Com efeito, para que pudessemos generalizar a relatividade especial, a fim de acoplarmos a gravitação, o papel da geometria se mostrou evidente. O espaço-tempo não mais seria o palco aonde os eventos acontecem e sim uma manifestação dinâmica na presença de matéria-energia. O papel da curvatura desse espaço seria uma medida do que conhecemos como “força gravitacional”. Em outras palavras, o espaço-tempo curva-se na presença de matéria-energia e essa *geometria curva* caracteriza a gravitação de Einstein. Agora, o campo gravitacional passa a ser determinado pelo comportamento da métrica e para isso devemos recorrer a um instrumental matemático conhecido como *variedades diferenciáveis*. Para detalhes acerca de variedades e o cálculo em variedades vide apêndice.

2.2 Geometria Riemanniana e Relatividade Geral

A Relatividade Geral é considerada, ao lado da Mecânica Quântica, uma das teorias físicas mais bem estabelecidas, descrevendo o que conhecemos como gravitação. Essas duas teorias descrevem ambientes, a priori, desconectados: o Macrocosmo e o Microcosmo, (das galáxias aos quarks), traçando e organizando o comportamento da matéria-energia que conhecemos. A Relatividade Geral ou, às vezes, chamada de Geometrodinâmica é fundamentada sobre a geometria diferencial, isto é, cálculo tensorial em espaços curvos. Naturalmente, para formularmos leis físicas, precisamos de equações diferenciais para esses tipos de vetores e tensores sobre a variedade espaço-temporal. Por sua vez, essas equações envolvem derivadas desses vetores e campos tensoriais em várias direções e necessitamos, então, de uma derivada direcional agindo sobre tensores arbitrários.

Primeiramente, poderíamos imaginar, que a derivada de Lie \mathcal{L}_v (vide apêndice) poderia ser usada com esse fim. Entretanto, vemos que, na realidade, ela não age como uma verdadeira derivada direcional pelo fato de depender do comportamento, na vizinhança imediata ao ponto, digamos, $p \in M$, do campo vetorial e não apenas da sua valoração pontual. A definição da derivada que irá cumprir as exigências requer informações sobre como *conectar* espaços tangentes situados em pontos distintos, T_pM e $T_{p'}M$. Se pudermos definir tal conexão [3, 13, 15, 16, 21] poderemos subtrair tensores em diferentes pontos da variedade. Para isso iremos definir uma outra estrutura em nossa variedade, afim de fazermos produto interno entre vetores e que guiará o comportamento dinâmico da gravitação: *tensor métrico*. De posse dessas duas estruturas, conseguiremos obter as equações de Einstein que governam a dinâmica do campo gravitacional.

2.2.1 Tensor Métrico

Na geometria euclidiana elementar, o produto interno ou, produto escalar, entre dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} é definido pela operação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m u_i v_i$, onde u_i e v_i são as componentes dos vetores em \mathbb{R}^m . Em uma variedade, o produto interno é definido,

2. Geometria Riemanniana

pontualmente, em cada espaço tangente T_pM . Estaremos trabalhando no âmbito da geometria Riemanniana e semi-Riemanniana (Lorentziana) [4, 20, 21], donde segue a seguinte

Definição 2.2.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana g sobre M é um tensor do tipo $(0, 2)$ sobre M satisfazendo os seguintes axiomas em cada ponto $p \in M$:*

$$(i) \quad g_p(u, v) = g_p(v, u),$$

$$(ii) \quad g_p \geq 0, \text{ onde a igualdade é válida se e, só se, } u = 0.$$

Lembremos que sempre que usarmos vetores em variedades, estamos nos referindo ao espaço tangente ao ponto observado. Assim, u e $v \in T_pM$ e g_p é a métrica valorada no ponto $p \in M$. De modo geral, o tensor métrico deve seguir as exigências usuais do produto interno.

Um tensor g do tipo $(0, 2)$ é chamado uma *métrica semi-Riemanniana* se satisfaz (i) e (ii') se $g_p(u, v) = 0 \forall u \in T_pM$, então $v = 0$. Na definição de produto interno entre o espaço tangente e seu dual (vide apêndice), onde $V \in T_pM$ e seu dual $\omega \in T_p^*M$ definiam a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Entretanto, com a existência de uma métrica, podemos definir o produto interno entre dois vetores distintos no T_pM , através de $g_p(u, v)$, onde $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Na verdade, Riez mostrou [12, 23, 24] que há um *isomorfismo* entre T_pM e T_p^*M mediado pela presença da métrica.

Considere uma carta (U, φ) em M e $\{x^\mu\}$ o sistema local de coordenadas associado. Como $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, podemos expandi-lo em termos do produto tensorial entre as bases do espaço dual $dx^\mu \otimes dx^\nu$ como

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.5)$$

Naturalmente, vemos que as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}(p)$ podem ser obtidas ao agirmos com o tensor nos vetores da base coordenada.

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p(e_\mu, e_\nu) = g_{\nu\mu} \quad (p \in M).$$

2. Geometria Riemanniana

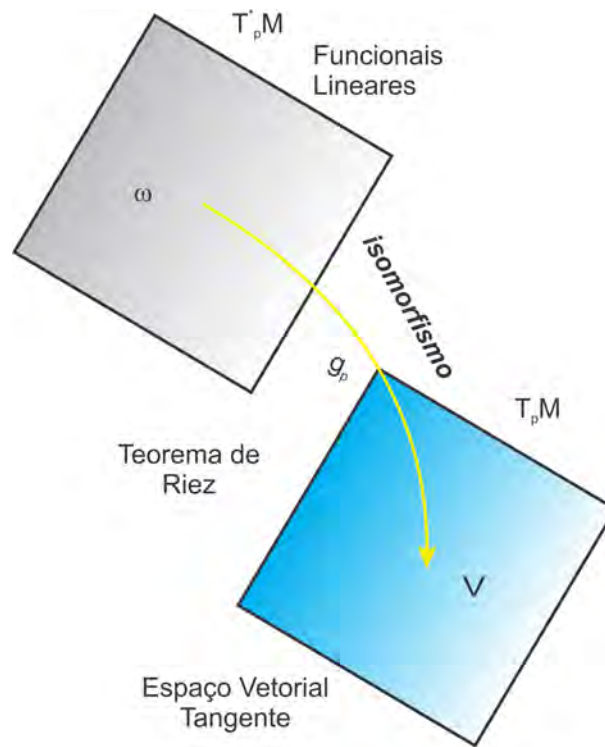


Figura 2.2: Isomorfismo entre o espaço tangente e seu dual mediado pela métrica g_p .

Pode-se mostrar [3, 16] que associado ao tensor métrico usual $g_{\mu\nu}$, existe sua inversa, denotado por $g^{\mu\nu}$, de modo que, $g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha$. Assim, o isomorfismo entre T_pM e T_p^*M pode ser expresso como

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu, \quad u^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu. \quad (2.6)$$

Através das equações relacionadas à métrica, vemos que podemos relacioná-las a ideia usual de distância quadrática: tome um deslocamento infinitesimal $dx^\mu e_\mu \in T_pM$ então o tensor métrico atua sobre este da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g\left(dx^\mu e_\mu, dx^\nu e_\nu\right) = dx^\mu dx^\nu g(e_\mu, e_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Podemos também pensar no tensor métrico como uma representação matricial, de modo que, a matriz $(g^{\mu\nu})$ é uma matriz simétrica, onde seus autovalores são todos reais. Se g é uma métrica Riemanniana, todos os seus autovalores são estritamente

2. Geometria Riemanniana

positivos, ao passo que, se g for semi-Riemanniana, alguns de seus autovalores podem ser negativos. Se temos i elementos positivos e j elementos negativos, o par (i, j) é chamado de assinatura da métrica. Se, por exemplo, $j = 1$, a métrica é dita ter uma assinatura *Lorentziana*. Se (M, g) é Lorentziana, os elementos de T_pM são divididos em três classes distintas 2.3:

- (i) $g(u, u) > 0 \rightarrow u$ é do **tipo-espaço**,
- (ii) $g(u, u) = 0 \rightarrow u$ é do **tipo-luz**,
- (iii) $g(u, u) < 0 \rightarrow u$ é do **tipo-tempo**.

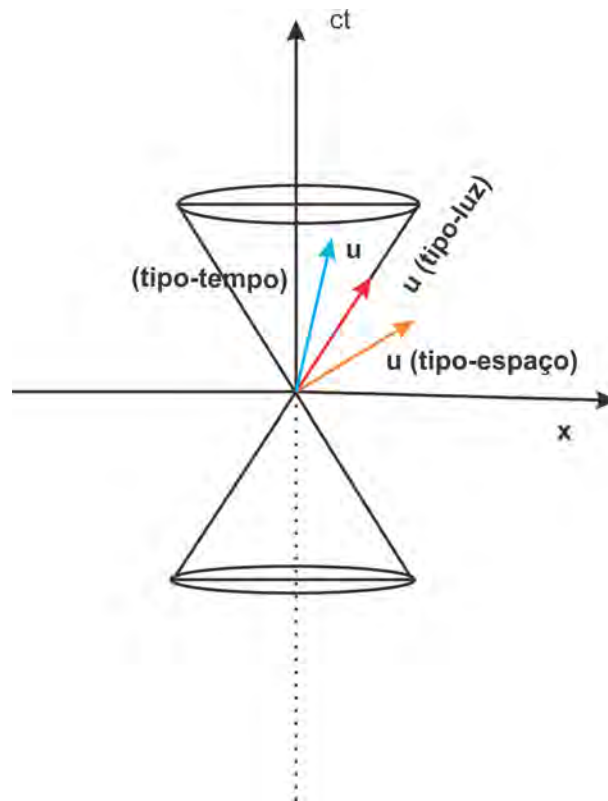


Figura 2.3: Cone de Luz e as denominações específicas dos vetores nas referidas inclinações.

2.2.2 Transporte Paralelo, Conexão e Derivação Covariante

Um campo vetorial X pode ser visto como a derivada direcional agindo sobre funções $f \in \mathcal{F}(M)$ (vide apêndice) de modo que $X : f \mapsto X \circ f$. Contudo, ainda não

2. Geometria Riemmaniana

conseguimos definir derivadas direcionais agindo sobre campos tensoriais do tipo (q, r) , que emerge das estruturas diferenciais da variedade M . Iremos definir uma estrutura chamada *conexão*, que nos informará como tensores podem ser transportados ao longo de uma curva. Precisamos de um mecanismo que nos permita fazer um *transporte paralelo* de um tensor ao longo de uma curva para realizarmos as operações de subtração de vetores em pontos distintos da variedade. Para tanto, definimos a seguir o que chamamos de conexão afim.

Definição 2.2.2 *Uma conexão afim ∇ é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ ou, ainda, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes condições:*

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.7)$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (2.8)$$

$$\nabla_{(fX)} Y = f \nabla_X Y \quad (2.9)$$

$$\nabla_X(fY) = (X \circ f)Y + f \nabla_X Y \quad (2.10)$$

onde $f \in \mathcal{F}(M)$ e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Tome uma carta (U, φ) com um sistema local de coordenadas $x = \varphi(p)$ sobre M , e defina as funções $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ denominada de *coeficientes de conexão* de maneira que

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu \equiv \nabla_\nu e_\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_\lambda \quad (2.11)$$

onde $\{e_\mu\}$ são as bases coordenadas de $T_p M$. Os coeficientes de conexão nos dizem como os vetores da base variam ponto a ponto. De posse da atuação de ∇ sobre os vetores da base, podemos calcular a atuação de ∇ sobre quaisquer vetores. Assim, seja $V = V^\mu e_\mu$ e $W = W^\nu e_\nu$ elementos do espaço tangente $T_p M$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu \left(e_\mu [W^\mu] e_\nu + W^\nu \underbrace{\nabla_{e_\mu} e_\nu}_{coef} \right) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\alpha}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) e_\alpha. \end{aligned}$$

2. Geometria Riemmaniana

Por definição, ∇ mapeia dois vetores V e W a um novo vetor dado pela equação acima, cuja α -ésima componente é $V^\mu \nabla_\mu W^\alpha$, onde

$$\nabla_\mu W^\alpha \equiv \frac{\partial W^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha W^\beta \quad (2.12)$$

Note que, $\nabla_V W$ é um vetor que independe de derivadas ao longo do vetor que gera o fluxo, a saber V , diferentemente da derivada de Lie (vide apêndice) $\mathcal{L}_V W = [V, W]$. Nesse sentido, a derivada covariante é uma generalização da derivada direcional de funções¹ para tensores. Interessante notar, pela Eq.(2.12), que a derivada covariante é composta pela derivação cartesiana (Euclidiana ∂) mais um termo de correção sobre o vetor transportado. Assim, podemos observar que ao realizarmos um transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva sobre M , o vetor, de certa forma, adquire alguma informação sobre a *curvatura* associada a variedade. Os coeficientes de conexão seriam responsáveis por carregar essa informação extra. Vejamos a figura 2.2.4 como uma ilustração. Vemos que para fazer essa derivação covariante, precisamos fazer um transporte do nosso vetor e, assim como em espaços Euclidianos, devemos definir o que chamamos de transporte paralelo em M .

Considere uma curva na variedade M , podemos definir o transporte paralelo de um vetor ao longo desta. Seja $c : (-\lambda, \lambda) \rightarrow M$ uma curva em M . Tome uma carta (U, φ) cujas coordenadas são $x = \varphi(p)$. Seja X uma campo vetorial definido ao longo de $c(t)$,

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))e_\mu|_{c(t)}$$

Se X satisfaz a condição

$$\nabla_V X = 0 \quad \forall t \in (-\lambda, \lambda) \quad (2.13)$$

X é dito ter sofrido um transporte paralelo ao longo de $c(t)$, onde $V = d/dt = (dx^\mu(c(t))/dt)e_\mu|_{c(t)}$ é o vetor tangente a curva. A condição acima pode ser escrita

¹Devemos observar que a derivada covariante de uma função escalar, digamos f , nada mais é que a própria derivação cartesiana ∂ na direção do vetor tangente considerado.

2. Geometria Riemmaniana

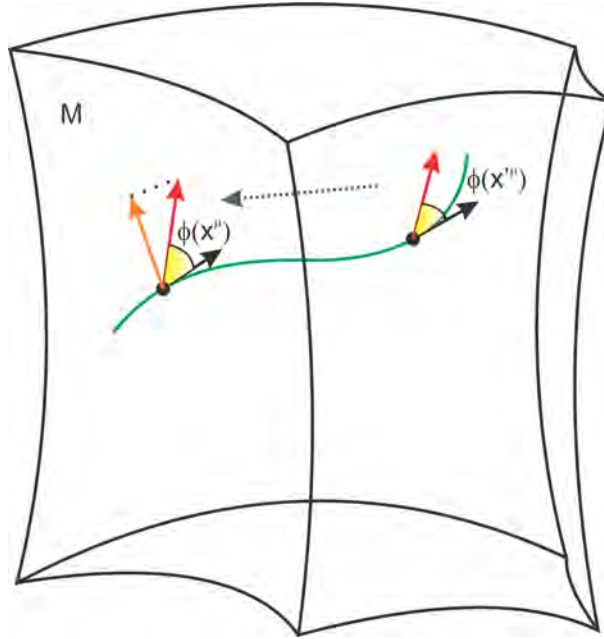


Figura 2.4: Transporte de um vetor, por uma conexão, ao longo de uma curva em M e, a absorção de informação sobre a curvatura da variedade.

em termos de um sistema local de coordenadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \nabla_{dx^\mu/dte_\mu}(X^\nu e_\nu) &= \frac{dx^\mu}{dt} \nabla_\mu (X^\nu e_\nu) \\
 &= \frac{dx^\mu}{dt} \left(\underbrace{\nabla_\mu X^\nu}_{\partial_\mu X^\nu} e_\nu + X^\nu \underbrace{\nabla_\mu e_\nu}_{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha} \right) \\
 &= \frac{dx^\mu}{dt} \left(\partial_\mu X^\nu e_\nu + X^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha \right) \\
 &= \partial_\mu X^\nu \frac{dx^\mu}{dt} e_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dt} X^\nu e_\alpha, \quad \alpha \rightleftharpoons \nu. \\
 &= \left(\underbrace{\frac{dX^\nu}{dt} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \frac{dx^\mu}{dt} X^\alpha}_{0} \right) e_\nu = \underbrace{(0)}_{0} e_\nu
 \end{aligned}$$

donde, obtemos a seguinte equação em componentes:

$$\frac{dX^\nu}{dt} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \frac{dx^\mu}{dt} X^\alpha = 0 \tag{2.14}$$

2. Geometria Riemmaniana

Agora, considere que desejamos trasportar, paralelamente, o próprio vetor tangente V , nesse caso, teremos $\nabla_V V = 0$ de maneira que:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{dx^\mu/dt} e_\nu &= \left(\nabla_\mu \left(\frac{dx^\nu}{dt} \right) e_\nu + \frac{dx^\nu}{dt} \underbrace{\nabla_\mu e_\nu}_{\delta_\mu^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{dt} = 0 \\
 &= \left(\partial_\mu \frac{dx^\nu}{dt} e_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{dt} e_\lambda \right) \frac{dx^\mu}{dt} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}}_{\delta_\mu^\nu} e_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{dt} e_\lambda \right) \frac{dx^\mu}{dt} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} e_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{dt} e_\lambda \right) \frac{dx^\mu}{dt}, \quad \mu \rightarrow \lambda \\
 &= \left(\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} \right) e_\lambda = 0
 \end{aligned}$$

A curva $c(t)$ será chamada de *geodésica*. As geodésicas são, de certa maneira, as curvas mais “retas” possíveis em uma variedade Riemanniana. Sua equação em componentes é da forma

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = 0. \quad (2.15)$$

Na mecânica Newtoniana, a trajetória de partículas livres é dada pela menor curva possível, que na verdade, é uma reta. Einstein percebeu que essa propriedade deveria também ser satisfeita na Relatividade Geral, desde que gravidade seja entendida como parte da geometria do espaço-tempo. De fato, podemos interpretar a equação da geodésica como sendo uma generalização da segunda lei de Newton, onde o termo geométrico seria responsável pela ação universal da gravitação. Daí, segue que uma partícula em queda livre deverá seguir trajetórias ditadas pela geodésica associada, ou seja, a menor curva possível conectando dois pontos do espaço-tempo.

2.2.3 Derivada Covariante de Campos Tensoriais

Como ∇_X possui o significado de uma derivada, é natural definirmos a derivada covariante de $f \in \mathcal{F}(M)$ como sendo a derivada cartesiana (euclidiana) usual, ou seja,

$$\nabla_X f = X \circ f = X^\mu \partial_\mu f.$$

O último axioma sobre a conexão afim nos mostra a regra de Leibnitz,

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y.$$

Devemos inserir essa validade quando tratamos com produtos tensoriais,

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2). \quad (2.16)$$

A Eq.(2.16) deve ser também verdadeira mesmo quando temos contração de alguns índices de um tensor arbitrário. A partir disso, podemos calcular a ação da derivada covariante de uma 1-forma $\omega \in T_p^*M$. Lembremos que a ação de uma 1-forma sobre veores do espaço tangente nos leva a um escalar, isto é, $\langle \omega, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$ para $Y \in \mathcal{X}(M)$, contudo, temos

$$X \circ (\omega \circ Y) = \nabla_X(\omega \circ Y) = \nabla_X \omega \circ Y + \omega \circ \nabla_X Y.$$

Escrevendo ambos os lados da equação acima em termos de componentes, temos

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (2.17)$$

Particurlamente, se $X = e_\mu$, obtemos

$$(\nabla_X \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (2.18)$$

Para $\omega = dx^\nu$, temos que

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda. \quad (2.19)$$

2. Geometria Riemmaniana

A generalização para um tensor de rank arbitrário segue em analogia. Agora, vejamos como a derivada covariante atua sobre o tensor métrico, isto é, queremos calcular as componentes $(\nabla_\nu g)_{\alpha\beta}$. Para isso, devemos recorrer à definição de métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$.

$$\begin{aligned} \nabla_{e_\nu}(g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta) &= (\nabla_\nu g_{\alpha\beta}) dx^\alpha \otimes dx^\beta + g_{\alpha\beta} (\underbrace{\nabla_\nu dx^\alpha}_{-\Gamma_{\nu\mu}^\alpha dx^\mu}) \otimes dx^\beta + g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes (\underbrace{\nabla_\nu dx^\beta}_{-\Gamma_{\nu\mu}^\beta dx^\mu}). \\ &= \partial_\nu g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta + g_{\alpha\beta} (-\Gamma_{\nu\mu}^\alpha dx^\mu) \otimes dx^\beta + g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes (-\Gamma_{\nu\mu}^\beta dx^\mu). \\ &= \partial_\nu g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu g_{\mu\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\mu g_{\alpha\mu} dx^\alpha \otimes dx^\beta. \quad (\mu \rightleftharpoons \alpha \text{ e } \mu \rightleftharpoons \beta) \end{aligned}$$

Assim, aplicando $\nabla_\nu g$ em uma base de vetores coordenados $\{e_\mu\}$ e, utilizando-se das propriedades de produto interno, obtemos:

$$(\nabla_\nu g)_{\alpha\beta} = \partial_\nu g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda g_{\alpha\lambda}. \quad (2.20)$$

2.2.4 Conexão Métrica, Curvatura e Torção

Ao investigarmos como uma conexão arbitrária ∇ se relaciona à derivação cartesiana (euclidiana) ∂ , verificamos que $\nabla - \partial$ atua sobre vetores exibindo um comportamento linear (sem envolver derivadas dos geradores de fluxo.). Em virtude desse fato, para um dado vetor X a operação $\nabla_X - \partial_X$ é, na verdade, uma transformação linear. Equivalentemente, podemos dizer que $\nabla - \partial$ é um funcional linear, isto é, uma transformação-valorada, 1-forma e poderíamos escrever:

$$\nabla - \partial \equiv \Gamma; \quad (\nabla_X - \partial_X)Y = \Gamma(X)Y.$$

O tensor Γ é chamado de tensor de Christoffel da conexão ∇ em relação a um sistema local de coordenadas $\{x^\mu\}$ onde ∂ é a derivação cartesiana. Para uma derivação cartesiana fixa ∂ , várias escolhas de Γ produziriam diferentes tipos de conexão ∇ . Assim, o tensor de Christoffel Γ parametriza todas as possíveis derivadas covariantes ∇ . Daí, vemos que não há uma maneira única para descrevermos como um vetor é transportado paralelamente ao longo de uma curva e, nossa tarefa, será escolher uma conexão que seja fisicamente plausível. Agora que nossa variedade está munida

2. Geometria Riemmaniana

com uma estrutura métrica, podemos fazer algumas restrições de caráter físico para as possíveis conexões. Iremos demandar que as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sejam covariantemente constante, ou seja, se dois vetores X e Y são transportados paralelamente ao longo de uma curva, logo o produto interno entre eles deve permanecer constante sob o transporte. Essa condição é fisicamente aceitável, visto que, é razoável exigirmos que as magnitudes (*comprimentos*) dos vetores e/ou tensores não se alterem ao longo de um transporte paralelo. Seja V um vetor tangente a uma curva arbitrária, ao longo da qual vetores são paralelamente trasportados. Então devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_V [g(X, Y)] = V^\nu [(\nabla_\nu g)(X, Y) + g(\nabla_\nu X, Y) + g(X, \nabla_\nu Y)] \\ &= V^\nu X^\alpha Y^\beta (\nabla_\nu g)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

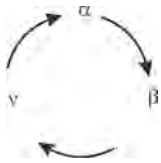
onde estamos levando em consideração que $\nabla_\nu X = \nabla_\nu Y \equiv 0$, isto é, estamos considerando que os vetores X e Y são “localmente constantes” na direção do vetor V . Como isso é verdade² para quaisquer curvas e vetores, deveremos ter:

$$(\nabla_\nu g)_{\alpha\beta} \equiv 0 \quad (2.21)$$

ou ainda, recorrendo à Eq.(2.20),

$$\partial_\nu g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda g_{\alpha\lambda} = 0. \quad (2.22)$$

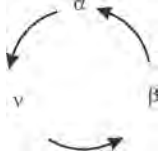
Se a condição acima (Eq.2.22) for satisfetida, a conexão afim ∇ é dita ser *compatível com a métrica* . Consideraremos sempre conexões compatíveis com a métrica. Observe que podemos fazer permutações cíclicas dos índices (ν, α, β) . Primeiro, consideremos a seguinte permutação:



²Deve ficar claro que, matematicamente, essa propriedade não é, necessariamente, assegurada. Estamos fazendo uma imposição física sobre o comportamento dos vetores.

2. Geometria Riemmaniana

$$\partial_\alpha g_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\lambda\beta} = 0 \quad (2.23)$$



$$\partial_\beta g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\beta\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda g_{\lambda\nu} = 0 \quad (2.24)$$

Combinando-se $(-2.22) + (2.23) + (2.24)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & -\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} + \underbrace{\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\beta}} - \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda g_{\lambda\nu}} - \underbrace{\Gamma_{\beta\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha}} + \underbrace{\Gamma_{\nu\beta}^\lambda g_{\alpha\lambda}} \\ & - \underbrace{\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\lambda\beta}} - \underbrace{\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda g_{\lambda\nu}} = 0 \end{aligned}$$

Juntando os termos em destaque, obtemos:

$$\begin{aligned} & -\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} + \left(\underbrace{\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda}_{\text{antissimetrico}} \right) g_{\lambda\beta} - \left(\underbrace{\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda}_{\text{simetrico}} \right) g_{\lambda\nu} + \\ & \left(\underbrace{\Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\beta\nu}^\lambda}_{\text{antissimetrico}} \right) g_{\lambda\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Observe que temos dois termos antissimétricos e um termo simétrico, de maneira que, podemos definir $T_{\nu\alpha}^\lambda = 2\Gamma_{[\nu\alpha]}^\lambda \equiv \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda$, e definindo $\Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda \equiv \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \right)$, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$-\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} + T_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\beta} + T_{\nu\beta}^\lambda g_{\lambda\alpha} - 2\Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda g_{\lambda\nu} = 0 \quad (2.25)$$

O tensor $T_{\nu\alpha}^\lambda$ é antissimétrico em relação aos índices subscritos, ou seja, $T_{\nu\alpha}^\lambda = -T_{\alpha\nu}^\lambda$ e é chamado de *tensor das torções*. A Eq.(2.25) pode ser resolvida para $\Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda$, onde

2. Geometria Riemmaniana

obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2}\left(T_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\beta} + T_{\nu\beta}^\lambda g_{\lambda\alpha}\right) &= \Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda g_{\lambda\nu} \\ \implies \Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda \underbrace{g_{\lambda\nu} g^{\nu\kappa}}_{\delta_\lambda^\kappa} &= \frac{1}{2}g^{\nu\kappa}(-\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2}\left(T_{\nu\alpha}^\lambda \underbrace{g_{\lambda\beta} g^{\nu\kappa}} + T_{\nu\beta}^\lambda \underbrace{g_{\lambda\alpha} g^{\nu\kappa}}\right), \\ \implies \Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda &= \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\left(T_\beta^\lambda{}_\alpha + T_\alpha^\lambda{}_\beta\right) \end{aligned}$$

Assim, definindo $\left\{\begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\right\} \equiv \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$ como sendo os símbolos de Christoffel, temos a seguinte equação:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \left\{\begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\right\} + \frac{1}{2}\left(T_\beta^\lambda{}_\alpha + T_\alpha^\lambda{}_\beta\right). \quad (2.26)$$

Finalmente, os coeficientes de conexão são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda &= \underbrace{\Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda}_{\text{simetrico}} + \underbrace{\Gamma_{[\alpha\beta]}^\lambda}_{\text{antissimetrico}} \\ &= \left\{\begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\right\} + \frac{1}{2}\left(T_\beta^\lambda{}_\alpha + T_\alpha^\lambda{}_\beta + T_{\alpha\beta}^\lambda\right). \end{aligned}$$

O segundo termo da última expressão é chamado de *contorção*, denotado por $C_{\alpha\beta}^\lambda$:

$$C_{\alpha\beta}^\lambda \equiv \frac{1}{2}\left(T_\beta^\lambda{}_\alpha + T_\alpha^\lambda{}_\beta + T_{\alpha\beta}^\lambda\right). \quad (2.27)$$

Se o tensor torção for identicamente nulo sobre nossa variedade M , a conexão métrica ∇ é chamada de **conexão de Levi-Civita**. Adiantamos que, em muitos livros-textos introdutórios de Relatividade Geral, usa-se sempre conexões de Levi-Civita mas uma generalização pode sempre ser feita ao considerarmos espaços com torção e/ou contorção.

2.2.5 Curvatura e Torção

A derivação parcial usual de funções escalares em relação a algum sistema local de coordenadas $\{x^\mu\}$ possui a propriedade de comutação³,

$$\partial_\mu \partial_\nu f = \partial_\nu \partial_\mu f.$$

Naturalmente, poderíamos nos perguntar se essa propriedade se estende à derivação covariante. Logo, queremos avaliar se a seguinte propriedade é assegurada

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f. \quad (2.28)$$

Estamos analisando essa propriedade de maneira particular, isto é, usando um sistema local de coordenadas. Afim de olharmos de maneira mais geométrica (sem explicitarmos coordenadas), iremos contrair a equação acima com dois vetores arbitrários $X^\mu Y^\nu$ e reescrever o resultado acima como se segue:

$$\begin{aligned} X^\mu Y^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu f &= X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu \nabla_\nu f) - (X^\mu \nabla_\mu Y^\nu) (\nabla_\nu f) \\ &= X \circ (Y \circ f) - (\nabla_X Y) \circ f. \end{aligned}$$

Assim, a propriedade de comutação nos fornece

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \circ f = X \circ (Y \circ f) - Y \circ (X \circ f) \equiv [X, Y] \circ f.$$

Concluimos, então, que para uma conexão arbitrária ∇ a comutatividade não é, necessariamente, válida. Para descrevermos a extensão para derivação covariante, em relação a essa propriedade, definimos o tensor torção⁴,

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.29)$$

³Lembremos que estamos considerando sempre classes de funções suaves, ou seja, $f \in \mathcal{C}^\infty$.

⁴Para uma demonstração de que a torção é um campo tensorial, vide [3, 13, 16].

2. Geometria Riemmaniana

Uma outra quantidade que também traduz, de maneira intrínseca, aspectos da geometria da variedade é o *Tensor de Curvatura de Riemann*, definido da seguinte forma

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.30)$$

Pode-se mostrar [3, 4, 16, 21, 23] que tanto o tensor de torção quanto o tensor de Riemann são campos tensoriais do tipo (1, 2) e (1, 3), respectivamente. Como T e R são campos tensoriais, suas operações sobre vetores são obtidas uma vez que conhecemos sua atuação sobre os vetores de uma base coordenada. Em relação a uma base coordenada $\{e_\mu\}$ e uma base dual $\{dx^\mu\}$, as componentes desses tensores são dadas por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= \langle dx^\lambda, T(e_\mu, e_\nu) \rangle = \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - \underbrace{[e_\mu, e_\nu]}_0 \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma_{\mu\nu}^\xi e_\xi - \Gamma_{\nu\mu}^\xi e_\xi \rangle = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \end{aligned}$$

Analogamente para o tensor de Riemann, temos

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \langle dx^\alpha, R(e_\mu, e_\nu)e_\beta \rangle = \langle dx^\alpha, \nabla_\mu \nabla_\nu e_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\beta - \nabla_{\underbrace{[e_\mu, e_\nu]}_0} e_\beta \rangle \\ &= \langle dx^\alpha, \nabla_\mu (\Gamma_{\nu\beta}^\xi e_\xi) - \nabla_\nu (\Gamma_{\mu\beta}^\xi e_\xi) \rangle \\ &= \langle dx^\alpha, (\partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\xi) e_\xi + \Gamma_{\nu\beta}^\xi \Gamma_{\mu\xi}^\eta e_\eta - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\xi) e_\xi - \Gamma_{\mu\beta}^\xi \Gamma_{\nu\xi}^\eta e_\eta \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\nu\beta}^\xi \Gamma_{\mu\xi}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\xi \Gamma_{\nu\xi}^\alpha. \end{aligned}$$

A grande motivação para a introdução do conceito de curvatura está em descrever em detalhes o desvio da geometria de uma variedade, nas proximidades de um ponto, daquela obtida em uma geometria planar. Uma descrição direta e apresentando o caráter intrínseco da geometria pode ser obtido usando o conceito de transporte paralelo. Iremos agora demonstrar o papel geométrico do tensor de curvatura de Riemann em um transporte infinitesimal. Assim se transportarmos um mesmo vetor a um ponto

2. Geometria Riemmaniana

da variedade por caminhos distintos, C e C' , o resultado da diferença é proporcional à curvatura da variedade. Com efeito, tome um paralelogramo infinitesimal pqr cujas coordenadas são $\{x^\mu\}$, $\{x^\mu + \varepsilon^\mu\}$, $\{x^\mu + \varepsilon^\mu + \delta^\mu\}$ e $\{x^\mu + \delta^\mu\}$, respectivamente, com ε^μ e δ^μ sendo infinitesimais. Se transportarmos um vetor $V_0 \in T_p M$ ao longo de $C = pqr$, obteremos um vetor $V_C(r) \in T_r M$. O vetor V_0 transportado para o ponto q ao longo de C , como mostra a figura 2.5, é dado por

$$V_C^\mu(q) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu$$

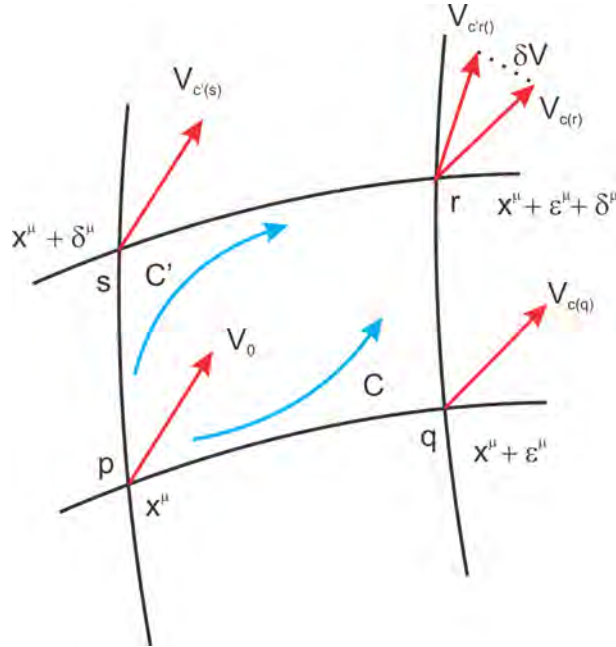


Figura 2.5: Transporte paralelo de um vetor V_0 em p ao longo de dois caminhos. A curvatura mede a diferença entre os dois vetores.

De maneira análoga, temos que

$$V_C^\mu(r) = V_C^\mu(q) - V_C^\kappa(q) \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu$$

onde, obtemos

$$V_C^\mu(r) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - \left(V_0^\kappa - V_0^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\kappa(p) \varepsilon^\beta \right) \left(\underbrace{\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q)}_{\delta^\nu} \right).$$

Observe que as componentes do tensor de Christoffel $\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q)$ são valoradas no ponto

2. Geometria Riemmaniana

q . Entretanto, precisamos de informações dessas componentes em relação ao ponto p , assim, devemos fazer uma expansão em série de Taylor⁵ em torno desse ponto, isto é,

$$\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(q) = \Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p) + \partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\varepsilon^{\lambda} + \mathcal{O}(2) + \dots$$

Substituindo essa expansão, temos

$$\begin{aligned} V_C^{\mu}(r) &\simeq V_0^{\mu} - V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\varepsilon^{\nu} - \left(V_0^{\kappa} - V_0^{\alpha}\Gamma_{\beta\alpha}^{\kappa}(p)\varepsilon^{\beta}\right)\left(\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p) + \partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\varepsilon^{\lambda}\right)\delta^{\nu} \\ &\simeq V_0^{\mu} - V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\varepsilon^{\nu} - \left(V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\delta^{\nu} + V_0^{\kappa}\partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\varepsilon^{\lambda}\delta^{\nu}\right) - \left(V_0^{\alpha}\Gamma_{\beta\alpha}^{\kappa}(p)\varepsilon^{\beta}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\delta^{\nu} + \right. \\ &\quad \left. + V_0^{\alpha}\Gamma_{\beta\alpha}^{\kappa}(p)\varepsilon^{\beta}\partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}(p)\varepsilon^{\lambda}\delta^{\nu}\right) \\ V_C^{\mu}(r) &\simeq V_0^{\mu} - V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}\varepsilon^{\nu} - V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}\delta^{\nu} - V_0^{\kappa}\left(\partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu}\right)\varepsilon^{\nu}\delta^{\lambda}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, vemos que ao transportarmos o vetor V ao longo do caminho C' , obtemos

$$V_{C'}^{\mu}(r) \simeq V_0^{\mu} - V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu}\delta^{\nu} - V_0^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} - V_0^{\kappa}\left(\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\kappa}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu}\right)\varepsilon^{\alpha}\delta^{\beta}.$$

Fazendo-se a diferença entre esses dois vetores, temos

$$\begin{aligned} V_{C'}^{\mu}(r) - V_C^{\mu}(r) &\simeq V_0^{\kappa}\left(\partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\kappa}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\kappa}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\nu}\Gamma_{\beta\nu}^{\mu}\right)\varepsilon^{\alpha}\delta^{\beta} \\ &\simeq V_0^{\kappa}R^{\mu}{}_{\kappa\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha}\delta^{\beta}. \end{aligned}$$

Assim, vemos que o transporte paralelo de um vetor é caminho dependente, onde essa dependência é expressa através da curvatura presente na variedade. De maneira análoga podemos ver a presença da torção como uma fenomenologia geométrica. Nesse caso, podemos mostrar [3, 16, 21] que o tensor de torção mede o quão falho é o fechamento de um paralelogramo infinitesimal, via um transporte paralelo como mostra a figura 2.6.

Do tensor de curvatura de Riemann, podemos construir duas quantidades importantíssimas através de uma contração de índices. O *tensor de Ricci*, é do tipo $(0, 2)$

⁵Note que estamos considerando pontos tão próximos quanto se queira, de modo que, termos quadráticos nas distâncias não irão contribuir de maneira efetiva.

2. Geometria Riemmaniana

definido por:

$$Ric(X, Y) \equiv \langle dx^\mu, R(e_\mu, Y)X \rangle \quad (2.31)$$

$$Ric_{\mu\nu} = Ric(e_\mu, e_\nu) = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (2.32)$$

e o *escalar de curvatura* \mathcal{R} que é obtido por mais uma contração de índices como se segue,

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} Ric(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

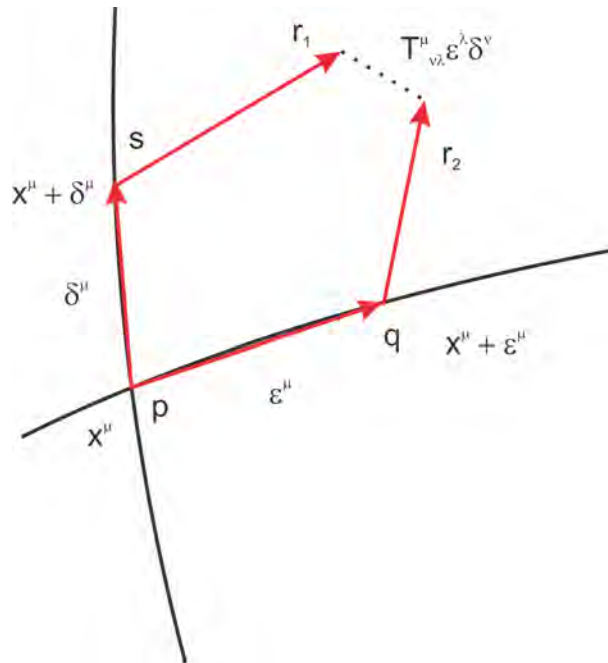


Figura 2.6: O vetor $qr_2(sr_1)$ é o vetor ps (pq) transportado paralelamente a $q(s)$. Em geral, $r_1 \neq r_2$ e a torção mede a diferença r_2r_1 .

2.2.6 Conexão de Levi-Civita e Equação de Einstein

Entre as várias conexões existentes temos uma conexão especial chamada de *conexão de Levi-Civita*, onde exigimos que nossa variedade apresente torção nula. Uma conexão ∇ , onde o tensor torção é nulo, é chamada *conexão simétrica*. Em termos de um sistema local de coordenadas, os coeficientes de conexão de uma conexão simétrica

2. Geometria Riemmaniana

deve satisfazer

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad (2.34)$$

Neste contexto, temos o seguinte

Teorema 2.2.1 *Sobre uma variedade (Semi-)Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão simétrica compatível com a métrica g . Essa conexão é chamada de Conexão de Levi-Civita.*

A demonstração desse teorema é bem simples e pode ser encontrada em [3, 16].

Considerando ∇ uma conexão satisfazendo o teorema acima, temos que o tensor de curvatura de Riemann é proporcional às derivadas primeiras das componentes de Christoffel que satisfazem a seguinte equação

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}).$$

onde, podemos reescrever o tensor de curvatura de Riemann como função da métrica e de suas derivadas,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right) + g_{\xi\kappa} (\Gamma_{\alpha\mu}^{\xi} \Gamma_{\beta\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\xi} \Gamma_{\beta\mu}^{\kappa})$$

onde, $R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\kappa} R^{\kappa}{}_{\beta\mu\nu}$, satisfaz as seguintes simetrias,

$$R_{[\alpha\beta]\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (2.35)$$

$$R_{\alpha\beta[\mu\nu]} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (2.36)$$

$$R_{(\alpha\beta)(\mu\nu)} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.37)$$

$$Ric_{\mu\nu} = Ric_{\nu\mu} \quad (2.38)$$

De posse desse formalismo, já conseguimos visualizar a beleza intrínseca do comportamento geométrico do cálculo em variedades. Para obtermos as equações de Einstein necessitamos do seguinte

2. Geometria Riemmaniana

Teorema 2.2.2 (*Teorema de Bianchi*) *Seja R o tensor Riemann definido em relação à conexão de Levi-Civita. Então, R satisfaz as seguintes identidades:*

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \quad (2.39)$$

$$(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V = 0 \quad (2.40)$$

Estas identidades são chamadas de primeira e segunda Identidades de Bianchi, respectivamente. Iremos demonstrar a primeira das identidades, pois a segunda segue em analogia. Para demonstrarmos essas identidades, como sugere Nakahara [3], devemos definir o que chamamos de simetrizador \mathcal{S} , donde $\mathcal{S}\{f(X, Y, Z)\} = f(X, Y, Z) + f(Z, X, Y) + f(Y, Z, X)$. Observe que $\mathcal{S}\{R(X, Y)Z\}$ nos produz o lado esquerdo da Eq.(2.39). Naturalmente, o simetrizador de zero é identicamente zero. Assim, a expressão $\mathcal{S}\{R(X, Y)Z\} = 0$ nos gera a primeira Identidade de Bianchi. Por hipótese, estamos considerando um espaço com conexão de Levi-Civita; logo, $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \equiv 0$. Tome a derivação covariante da torção com respeito a um vetor Z assim, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\ &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - (\nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]]) \end{aligned}$$

Note que, pela conexão de Levi-Civita $T(X, Y) \equiv 0 \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Assim, como $[X, Y]$ é também um vetor, podemos escrever

$$\begin{aligned} T([X, Y], Z) &= \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Z [X, Y] + [Z, [X, Y]] = 0 \\ \implies \nabla_Z [X, Y] &= \nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]]. \end{aligned}$$

Daí, aplicando-se o simetrizador, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\{0\} &= \mathcal{S}\{\nabla_Z \nabla_X Y\} - \mathcal{S}\{\nabla_Z \nabla_Y X\} - \mathcal{S}\{\nabla_{[X, Y]} Z\} - \mathcal{S}\{[Z, [X, Y]]\} \\ \implies 0 &= \mathcal{S}\{\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[X, Y]} Z\} - \mathcal{S}\{[Z, [X, Y]]\} \end{aligned}$$

2. Geometria Riemmaniana

Observe que $\mathcal{S}\{[Z, [X, Y]]\}$ é na verdade a Identidade de Jacobi [3, 5, 13, 16], ou seja, $\mathcal{S}\{[Z, [X, Y]]\} \equiv 0$ e, lembrando da definição de tensor de curvatura, temos

$$\begin{aligned} & [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z = R(X, Y)Z \\ & \mathcal{S}\{R(X, Y)Z\} = 0 \\ \implies & R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Dado um sistema local de coordenadas, podemos reescrever às Identidades de Bianchi, como

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} = 0 \quad (2.41)$$

$$(\nabla_\alpha R)^\kappa{}_{\beta\mu\nu} + (\nabla_\mu R)^\kappa{}_{\beta\nu\alpha} + (\nabla_\nu R)^\kappa{}_{\beta\alpha\mu} = 0. \quad (2.42)$$

$$\implies \nabla_\alpha R^\kappa{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\kappa{}_{\beta\nu\alpha} + \nabla_\nu R^\kappa{}_{\beta\alpha\mu} = 0 \quad (2.43)$$

Contraindo os índices κ e μ na segunda Identidade de Bianchi, obtemos

$$\implies \nabla_\alpha Ric_{\beta\nu} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\beta\nu\alpha} - \nabla_\nu Ric_{\beta\alpha} = 0 \quad (2.44)$$

Se contraírmos os índices β e ν , teremos

$$g^{\beta\nu} \nabla_\alpha Ric_{\beta\nu} + g^{\beta\nu} \nabla_\mu R^\mu{}_{\beta\nu\alpha} - g^{\beta\nu} \nabla_\nu Ric_{\beta\alpha} = 0 \quad (2.45)$$

$$(\nabla_\alpha \mathcal{R}) - (\nabla_\mu Ric)_\alpha^\mu - (\nabla_\mu Ric)_\alpha^\mu = 0 \quad (2.46)$$

$$\nabla_\mu (\mathcal{R}\delta - 2Ric)_\alpha^\mu = 0 \quad (2.47)$$

Finalmente, podemos reescrever a Eq. (2.47), considerando $\alpha \mapsto \nu$, da seguinte forma

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (2.48)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o *tensor de Einstein* definido por

$$G^{\mu\nu} = Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R}. \quad (2.49)$$

2. Geometria Riemmaniana

O que Einstein percebeu é que, num âmbito geral, o tensor Energia-Momento, $T^{\mu\nu}$, responsável por caracterizar a matéria-energia do espaço-tempo é covariantemente conservado. A teoria da Relatividade Geral, então, nos mostra uma igualdade entre matéria e geometria. Em outras palavras, nas equações de Einstein temos uma nova fusão de conceitos, podemos ver o que a presença de matéria-energia produz um caráter geométrico curvo na variedade espaço-temporal e o grau dessa curvatura é traduzido como o que conhecemos por campo gravitacional. Assim, as equações de Einstein podem ser escritas como se segue:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.50)$$

onde a constante $\kappa = -8\pi G$ e G é a constante de Newton para a gravitação. Uma maneira interessante de se obter essa constante é feita em [13], considerando-se uma aproximação de campo fraco ou, de outra maneira, em [14] através da aproximação linear da gravitação.

Capítulo 3

Formalismo $3 + 1$ da Gravitação

Desejamos trabalhar com uma tentativa de quantização da gravitação Einsteiniana. Afim de olharmos para uma gravitação quântica, o processo natural para quantização de campo é termos uma descrição Hamiltoniana e, a partir desta, introduzir o processo de quantização canônica. A quantização canônica é proporcionada pela Gravitação Quântica via Laços e, para galgarmos rumo à escala de Planck ($L_{Planck} = 10^{-33} \text{ cm}$) da Relatividade Geral, necessitamos introduzir o formalismo ADM¹ da Geometrodinâmica. Para tanto, devemos introduzir uma aproximação conhecida como *formalismo $3 + 1$* da Relatividade Geral. Essa aproximação é alicerçada no “fatiamento” da nossa variedade quadri-dimensional (espaço-tempo) em superfícies tridimensionais (hiperfícies).

Veremos que essas hiperfícies tem de ser do tipo-espaço, de maneira que a métrica induzida sobre as hiperfícies, por uma variedade, seja *Riemanniana* (assinatura positiva-definida). De um ponto de vista matemático, esse procedimento nos permitirá formular as equações de Einstein como um *problema de Cauchy* vinculado. Informalmente, essa aproximação nos permite “separar” ou, decompor, o espaço-tempo em “espaço” + “tempo”, de maneira que podemos avaliar a evolução temporal da hiperfície tridimensional.

¹Formalismo proposto por Arnowitt, Deser e Misner (ADM) no início da década de 60.

3.1 Geometria de Hiperfícies

A noção de hiperfície é base para o formalismo 3 + 1 da relatividade geral. A priori, esse tratamento é completamente independente das equações de Einstein, porém, imprescindível para estas. Uma introdução elementar de hiperfícies é apresentada em [17, 37, 38]. Faremos uma apresentação menos elaborada, no que tange a detalhes de geometria diferencial, mas que nos guiará ao problema de Cauchy para a gravitação.

Definição 3.1.1 *Uma hiperfície Σ de M é a imagem de uma variedade 3-dimensional $\bar{\Sigma}$ por uma imersão $\Phi : \bar{\Sigma} \rightarrow M$:*

$$\Sigma = \Phi(\bar{\Sigma}) \quad (3.1)$$

Exigindo que a imersão $\Phi : \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ seja um homeomorfismo, isto é, uma aplicação injetiva (um-a-um), onde tanto Φ quanto Φ^{-1} são contínuas como mostra a Fig. 3.1.

Uma imersão injetiva garante que toda hiperfície não intersepte consigo mesma. Por outro lado, assim como em cálculo usual [3, 7, 8], uma hiperfície pode ser definida, localmente, como um conjunto de pontos nos quais um campo escalar em M , digamos t , é constante:

$$\forall p \in M, \quad p \in \Sigma \iff t(p) = 0. \quad (3.2)$$

Estaremos assumindo que Σ seja uma subvariedade conexa [1, 2, 7] de M com topologia do \mathbb{R}^3 . Daí, podemos introduzir um sistema local de coordenadas em M , $x^\mu = (t, x, y, z)$, tal que t gera \mathbb{R} e (x, y, z) são coordenadas cartesianas que geram o \mathbb{R}^3 . Σ é definida através da condição, em coordenadas, que $t = 0$ e uma forma explícita da imersão Φ pode ser obtida, fazendo-se a consideração $x^I = (x, y, z)$ como sendo as coordenadas da variedade 3-dimensional $\bar{\Sigma}$

$$\begin{aligned} \Phi : \bar{\Sigma} &\longrightarrow M \\ (x, y, z) &\longmapsto (0, x^I). \end{aligned}$$

A imersão Φ leva curvas em $\bar{\Sigma}$ em curvas na variedade M . Naturalmente, Φ leva vetores em $\bar{\Sigma}$ a vetores em M . Em outras palavras, a imersão induz uma aplicação

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

entre os espaços tangentes $T_p(\bar{\Sigma})$ e $T_p M$ como visto no capítulo anterior.

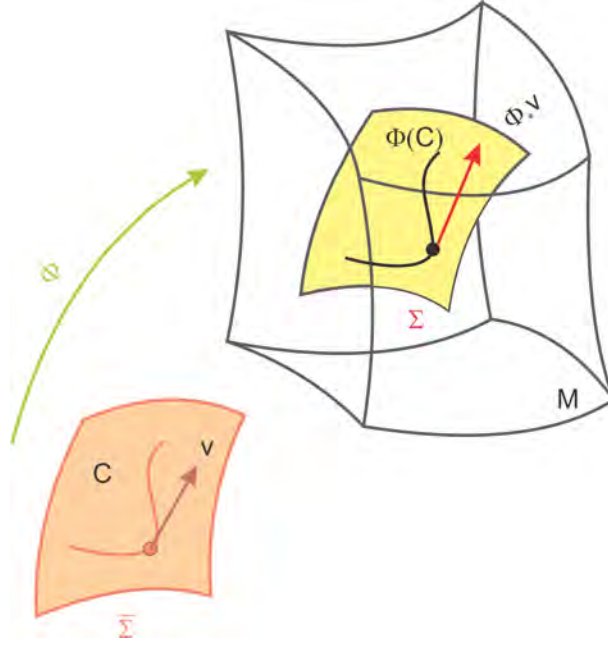


Figura 3.1: Imersão Φ de uma variedade 3-dimensional em uma 4-dimensional M , definindo a hipersfície $\Sigma = \Phi(\bar{\Sigma})$.

$$\begin{aligned} \Phi_* : T_p(\bar{\Sigma}) &\longrightarrow T_p(M) \\ \mathbf{v} = v^I e_I &\longmapsto \Phi_* \mathbf{v} = (0, v^I) \end{aligned}$$

onde v^I denota as componentes do vetor \mathbf{v} em relação aum sistema local de coordenadas e_I de $T_p(\bar{\Sigma})$. Analogamente, a imersão inversa Φ^* age entre os elementos dos respectivos espaços duais $T_p^*(M)$ e $T_p^*(\bar{\Sigma})$ como dantes definido

$$\begin{aligned} \Phi^* : T_p^*(M) &\longrightarrow T_p^*(\bar{\Sigma}) \\ \omega &\longmapsto \Phi^* \omega : T_p(\bar{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{R} \\ &\mathbf{v} \longmapsto \langle \omega, \Phi_* \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Lembremos que o pull-back pode ser estendido, naturalmente, a formas multilineares sobre $T_p(M)$ da seguinte forma:

$$\forall(v_1, \dots, v_n) \in T_p(\Sigma)^n, \quad \Phi^*T(v_1, \dots, v_n) = T(\Phi_*v_1, \dots, \Phi_*v_n).$$

Um caso de suma importância, em relação ao pull-back, é o da sua operação em uma forma bilinear g , ou seja, a métrica do espaço-tempo, que define uma *métrica induzida* sobre Σ :

$$h \equiv \Phi^*g \tag{3.3}$$

h é conhecido como *primeira forma fundamental de Σ* . Iremos usar uma nomenclatura mais compacta de h , como sendo a *3-métrica* para nos referirmos à métrica induzida. Observe que

$$\forall(u, v) \in T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma), \quad u.v = g(u, v) = h(u, v)$$

Considerando-se uma sistema local de coordenadas² $x^I = (x, y, z)$ de Σ , as componentes da 3-métrica h são da seguinte forma

$$h_{IJ} = g_{IJ}. \tag{3.4}$$

Note que as componentes de g_{IJ} são na verdade parte do tensor da variedade completa.

$$(g_{\mu\nu})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} g_{00} & \dots \\ \vdots & \begin{pmatrix} g_{IJ} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Definiremos as hiperfícies como sendo

- **tipo-espaço** quando a métrica h for positiva, isto é, de assinatura $(+, +, +)$;
- **tipo-tempo** quando a métrica h é Lorentziana, isto é, de assinatura $(-, +, +)$;
- **nula** se a métrica é degenerada. isto é, possui assinatura do tipo $(0, +, +)$.

²Iremos sempre usar letras latinas para índices que percorrem o conjunto $\{1, 2, 3\}$.

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

3.1.1 Vetor Normal e Curvatura Extrínseca

Dado um campo escalar t em M de modo que a hipersuperfície Σ é definida como sendo uma superfície de nível e t , o gradiente 1-forma \mathbf{dt} é normal a Σ , no sentido que para todo vetor \mathbf{v} tangente a Σ , $\langle \mathbf{dt}, \mathbf{v} \rangle = 0$. O dual métrico a \mathbf{dt} , ou seja, o vetor ∇t (cujas componentes são $\nabla^\alpha t = g^{\alpha\mu} \nabla_\mu t = g^{\alpha\mu} (\mathbf{dt})_\mu$) é um vetor normal a Σ que satisfaz as seguintes propriedades

- ∇t é do tipo-tempo se e, só se, Σ é do tipo-espaço;
- ∇t é do tipo-espaço se e, só se, Σ é do tipo-tempo.
- ∇t é nula se e, só se, Σ é nula.

Devemos notar que o vetor ∇t define uma direção normal única para Σ e que aponta para a direção de máximo crescimento do campo escalar que descreve Σ . Em outras palavras, quaisquer vetores normais a Σ , devem ser colineares a ∇t : $\mathbf{v} = c\nabla t$, com $c \in \mathbb{R}$. Para os caso em que nossa hipersuperfície é não-nula, podemos normalizar o vetor gradiente ∇t afim de torná-lo unitário, da seguinte forma

$$\mathbf{n} \equiv \left(\pm \nabla t \cdot \nabla t \right)^{-1/2} \nabla t \quad (3.5)$$

com o sinal $+$ para hipersuperfície do tipo-tempo e $-$ para tipo-espaço. Naturalmente, o vetor \mathbf{n} é unitário por construção, de fato,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1 \quad \text{se } \Sigma \quad (\text{tipo - espaco}), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{se } \Sigma \quad (\text{tipo - tempo}). \quad (3.7)$$

Se Σ é do tipo-espaço ou tipo-tempo, então, a 3-métrica h é não degenerada. Assim, existe uma conexão afim única, que é compatível com a métrica, como visto no capítulo anterior, e, denotaremos-la por D sobre a variedade Σ com torsão nula. Dessa forma, D é chamada de conexão de Levi-Civita associada a 3-métrica h que satisfaz, de maneira análoga, a seguinte propriedade

$$Dh = 0 \quad (3.8)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Da mesma forma, podemos definir o tensor de Riemann associado a essa conexão que descreve o que chamamos de curvatura intrínseca da hipersuperfície (Σ, h) . Iremos denotar as componentes do tensor de Riemann intrínseco por ${}^{(3)}R^K{}_{LIJ}$. Observe que da mesma forma apresentada anteriormente, ${}^{(3)}R$ é uma medida da não comutatividade entre as derivações covariantes sucessivas, nesse caso D para 3 dimensões, donde:

$$\forall v \in T(\Sigma), \quad (D_I D_J - D_J D_I)v^K = {}^{(3)}R^K{}_{LIJ}v^L. \quad (3.9)$$

o correspondente tensor Ricci será denotado por ${}^{(3)}Ric_{IJ} = {}^{(3)}R^K{}_{IKJ}$ e o escalar de curvatura por ${}^{(3)}\mathcal{R} = h^{IJ} {}^{(3)}Ric_{IJ}$. ${}^{(3)}\mathcal{R}$ é também chamado de *curvatura Gaussiana* de (Σ, h) .

Além da curvatura intrínseca, podemos considerar um outro tipo de “curvatura” presente nas hipersuperfícies, àquela que um observador constata ao olhar de fora desta. Esse tipo de curvatura está vinculada à mudança de direção do vetor normal \mathbf{n} ao se mover sobre Σ . Em outras palavras, o vetor normal é responsável por fazer uma “leitura” da curvatura extrínseca da hipersuperfície (Fig. 3.2). De maneira mais precisa, definiremos o chamado *Mapeamento de Weingarten* como uma aplicação que associa a cada vetor tangente a Σ a variação do vetor normal ao longo deste; essa variação sendo provida via a conexão espaço-temporal ∇ :

$$\mathcal{W}: T_p(\Sigma) \longrightarrow T_p(\Sigma) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v} \longmapsto \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n} \quad (3.11)$$

Essa aplicação é bem definida, no sentido que sua imagem está em $T_p(\Sigma)$. De fato, temos que

$$\mathbf{n} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{v}}(\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}_{\pm 1}) = 0 \quad (3.12)$$

O que nos mostra que $\mathcal{W}(\mathbf{v}) \in T_p(\Sigma)$. Por outro lado, a propriedade fundamental do mapeamento de Weingarten é seu caráter *auto-adjunto* em relação a 3-métrica h .

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma), \quad h(\mathbf{u}, \mathcal{W}(\mathbf{v})) = h(\mathcal{W}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \quad (3.13)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

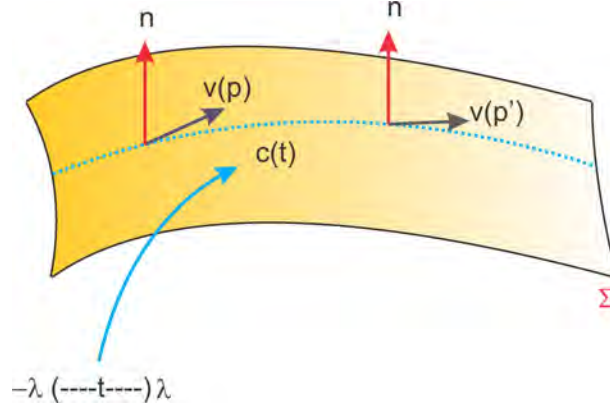


Figura 3.2: O mapeamento de Weingarten nos mostra o quanto o vetor normal varia ao longo de uma curva gerada por um vetor tangente a hiperfície: $\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}$.

Com efeito, recorrendo à definição de \mathcal{W} , temos

$$\mathbf{u} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}$$

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}, \quad \implies \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}.$$

Substituindo a última equação obtida, na primeira, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{v}}(\underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}_{=0}) - \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}. \\ \implies \mathbf{u} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) &= -\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Temos ainda que, o tensor torção é dado por $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Como estamos trabalhando com variedades livres de torção, podemos relacionar a derivação covariante $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ com $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. Assim, temos que $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Daí, substituindo

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

essa expressão na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) &= -\mathbf{n} \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \\
 &= \underbrace{-\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v}} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\
 \mathbf{u} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) &= -\nabla_{\mathbf{u}}(\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{=0}) + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n}}_{\text{Wein.}} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\
 &= \mathbf{v} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}].
 \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que o termo $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ é identicamente nulo. Existem maneiras alternativas como podem ser vistas em [17, 37]. Entretanto, se notarmos que o comutador entre dois vetores é, na verdade, a derivada de Lie (vide apêndice) e, por construção, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in T_p(\Sigma)$ vemos que o comutador de dois vetores é ainda um vetor tangente a hiperfície Σ . Com efeito, ao computarmos seu produto interno com um vetor normal, obtemos, trivialmente, que $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$, o que finaliza a demonstração. \square

Definição 3.1.2 *A forma bilinear sobre o espaço tangente de Σ definida por*

$$\mathbf{K}: T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.14)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto -\mathbf{u} \cdot \mathcal{W}(\mathbf{v}) \quad (3.15)$$

é simétrica e é chamada de segunda forma fundamental da hiperfície Σ . Definimos \mathbf{K} como sendo o tensor de curvatura extrínseca de Σ .

Assim, vemos que a variação do vetor normal ao longo da hiperfície caracteriza a curvatura extrínseca de Σ , como podemos ver ilustrado nas figuras 3.3 e 3.4

3.1.2 Hiperfícies do Tipo-Espaço e Relação de Gauss-Codazzi

A partir de agora, iremos nos concentrar em um tipo específico de hiperfície Σ cuja 3-métrica é positiva-definida (Riemanniana), isto é, estaremos interessados no comportamento de hiperfícies do tipo-espaço. Para isso, iremos definir o que chamamos de *Projetor Ortogonal* que nos informará como decompor um vetor qualquer em componentes normal e tangencial a Σ , equivalentemente, uma componente do tipo-tempo

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

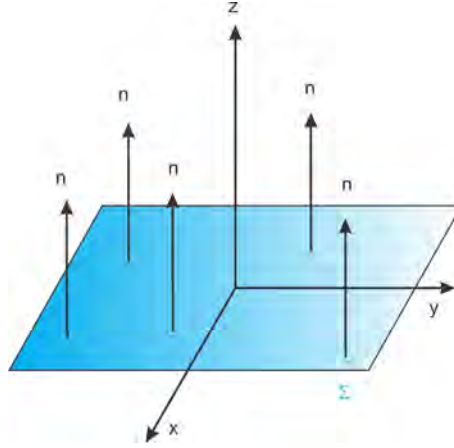


Figura 3.3: Plano Σ como uma hiperfície do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Observe que o vetor normal \mathbf{n} permanece constante ao longo de Σ ; isso implica que sua curvatura extrínseca é identicamente nula.

e componentes do tipo-espaço. Assim, para cada $p \in \Sigma$ o espaço de todos os vetores espaço-temporais pode ser decomposto da seguinte maneira

$$T_p(M) = T_p(\Sigma) \oplus \text{Vec}(\mathbf{n}), \quad (3.16)$$

onde $\text{Vec}(\mathbf{n})$ é um subespaço unidimensional de $T_p(M)$ gerado pelo vetor \mathbf{n} . O *projetor ortogonal* sobre Σ é o operador $\vec{\gamma}$ associado a decomposição acima definido por:

$$\vec{\gamma}: T_p(M) \longrightarrow T_p(\Sigma) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}. \quad (3.18)$$

Esse projetor é, na verdade, uma função que retira toda a contribuição normal de um vetor em uma variedade M , subtraindo-a do vetor original. Em particular, como uma consequência direta de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$, $\vec{\gamma}$ satisfaz

$$\vec{\gamma}(\mathbf{n}) = 0 \quad (3.19)$$

Por outro lado, ele age como um operador identidade se o vetor já é um elemento do espaço vetorial tangente a Σ :

$$\forall \mathbf{v} \in T_p(\Sigma), \quad \vec{\gamma}\mathbf{v} = \mathbf{v}. \quad (3.20)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

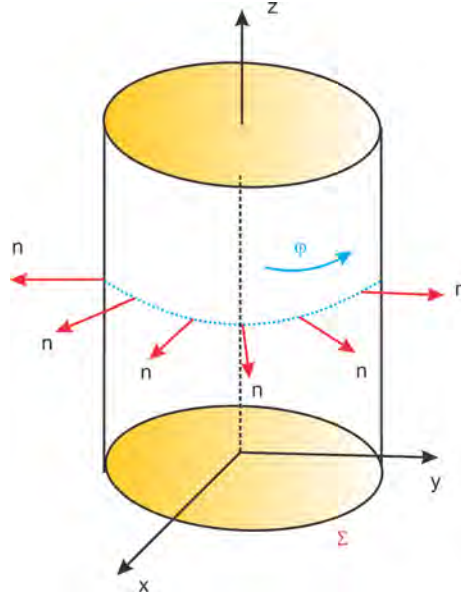


Figura 3.4: Cilindro Σ como uma hiperfície em \mathbb{R}^3 . Observe que o vetor normal \mathbf{n} varia ao longo de Σ em função da variação de φ .

De acordo com a definição do projetor, temos que, sua representação em componentes em relação a um sistema local de coordenadas é da seguinte forma:

$$\gamma_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + n^{\alpha}n_{\beta}. \quad (3.21)$$

Devemos observar que a imersão Φ de Σ em M induz um mapeamento $T_p(\Sigma) \rightarrow T_p(M)$ e o pull-back associado, mas não fornece uma aplicação de maneira reversa, isto é, de $T_p(M)$ para $T_p(\Sigma)$ e de $T_p^*(\Sigma)$ para $T_p^*(M)$. Vemos que o projetor ortogonal, naturalmente, promove essas aplicações reversas: da própria definição, temos uma aplicação da variedade na hiperfície e podemos construir deste uma aplicação do tipo $\vec{\gamma}_M^* : T_p^*(\Sigma) \rightarrow T_p^*(M)$ da seguinte maneira:

$$\vec{\gamma}_M^* \omega : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v} \longmapsto \omega(\vec{\gamma}(\mathbf{v})). \quad (3.23)$$

Naturalmente, podemos estender a operação $\vec{\gamma}_M^*$ para qualquer forma multilinear. Assim, dado um campo tensorial T sobre Σ , sua derivada covariante DT em relação a conexão de Levi-Civita (3-métrica h) pode ser expressa em termos da derivada

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

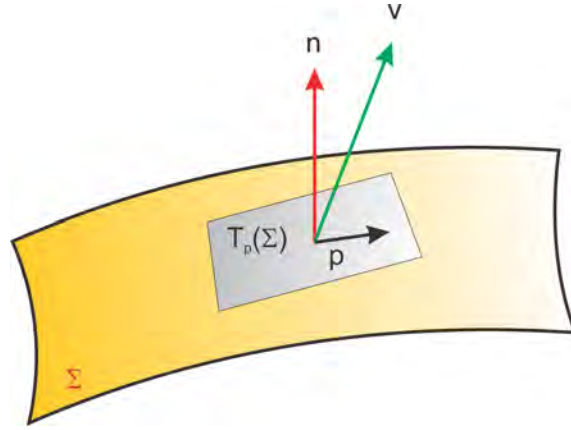


Figura 3.5: Ilustração da ação do projetor sobre um vetor em uma variedade M .

covariante ∇T com relação à conexão espaço-temporal ∇ , como se segue:

$$DT = \bar{\gamma}^* \nabla T, \quad (3.24)$$

Dado um sistema local de coordenadas, podemos representar a eq. anterior em componentes

$$D_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \gamma_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots \gamma_{\mu_p}^{\alpha_p} \gamma_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \gamma_{\beta_q}^{\nu_q} \gamma_\rho^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (3.25)$$

Agora, iremos derivar equações que constituem a base para o formalismo 3 + 1 da relatividade geral. Elas constituem na decomposição do tensor de Riemann do espaço-tempo, ${}^{(4)}R$, em termos de quantidades relativas a hiperfície do tipo-espaço Σ e são conhecidas como equações de Gauss-Codazzi. Considere a definição do tensor de Riemann associado a 3-métrica h que coincide com o projetor γ [17, 37, 38] sobre Σ .

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma - D_\beta D_\alpha v^\gamma = R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu \quad (3.26)$$

onde \mathbf{v} é um vetor qualquer sobre Σ . Consideremos a projeção que relaciona D -conexão com ∇ -conexão, donde

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta v^\gamma &= \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \nabla_\mu (D_\nu v^\rho) \\ &= \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \nabla_\mu (\gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho \nabla_\sigma v^\lambda) \\ &= \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \left[(\nabla_\mu \gamma_\nu^\sigma) \gamma_\lambda^\rho \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma_\nu^\sigma (\nabla_\mu \gamma_\lambda^\rho) \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \right] \end{aligned}$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

lembrando que o projetor é da forma, $\gamma_\nu^\sigma = \delta_\nu^\sigma + n^\sigma n_\nu \implies \nabla_\mu(\gamma_\nu^\sigma) = (\nabla_\mu n^\sigma)n_\nu + n^\sigma(\nabla_\mu n_\nu)$. Substituindo essa decomposição na equação acima, obtemos:

$$D_\alpha D_\beta = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \underbrace{\gamma_\rho^\gamma}_{\text{proj}} \left[(\nabla_\mu n^\sigma n_\nu + n^\sigma \nabla_\mu n_\nu) \gamma_\lambda^\rho \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma_\nu^\sigma (\nabla_\mu n^\rho n_\lambda + \underbrace{n^\rho}_{\text{proj}} \nabla_\mu n_\lambda) \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \right]$$

Como a projeção do vetor normal é identicamente nula, temos $\gamma_\rho^\gamma n^\rho = 0$, temos:

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \left[n^\sigma \nabla_\mu n_\nu \gamma_\lambda^\rho \nabla_\sigma v^\lambda + \gamma_\nu^\sigma \nabla_\mu n^\rho \underbrace{n_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda}_{\text{proj}} + \gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \right]$$

O termo em destaque pode ser rearranjado da seguinte maneira, $\nabla_\sigma(n_\lambda v^\lambda) = v^\lambda \nabla_\sigma n_\lambda + n_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda$, como $n_\lambda v^\lambda \equiv 0 \implies -v^\lambda \nabla_\sigma n_\lambda = n_\lambda \nabla_\sigma v^\lambda$, donde

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta v^\gamma &= \underbrace{\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma}_{\text{proj}} \left(n^\sigma \nabla_\mu n_\nu \gamma_\lambda^\rho \nabla_\sigma v^\lambda - \gamma_\nu^\sigma \nabla_\mu n^\rho v^\lambda \nabla_\sigma n_\lambda + \underbrace{\gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho}_{\text{proj}} \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \right) \\ &= \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\mu n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\nu^\sigma v^\lambda \nabla_\mu n^\rho \nabla_\sigma n_\lambda + \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \\ &= \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\mu n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\sigma \gamma_\rho^\gamma v^\lambda \underbrace{\nabla_\mu n^\rho \nabla_\sigma n_\lambda}_{\text{proj}} + \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda \end{aligned}$$

Sendo, $\nabla_\mu n^\rho := K_\mu^\rho$ e $\nabla_\sigma n_\lambda := K_{\mu\nu}$, obtemos

$$D_\alpha D_\beta = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\mu n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\sigma \gamma_\rho^\gamma v^\lambda K_\mu^\rho K_{\sigma\lambda} + \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\mu \nabla_\sigma v^\lambda$$

observando que $\gamma_\alpha^\mu \gamma_\mu^\rho = K_\alpha^\rho$ e $\gamma_\beta^\sigma K_{\sigma\lambda} = K_{\beta\lambda}$, chegamos, finalmente em

$$D_\alpha D_\beta v^\gamma = \gamma_\lambda^\gamma K_{\alpha\beta} n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - K_\alpha^\gamma K_{\beta\mu} v^\mu + \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\rho \nabla_\sigma v^\lambda. \quad (3.27)$$

Quando realizamos uma permutação dos índices α e β , obtemos

$$D_\beta D_\alpha = \gamma_\lambda^\gamma K_{\beta\alpha} n^\sigma \nabla_\sigma v^\lambda - K_\beta^\gamma K_{\alpha\mu} v^\mu + \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma \nabla_\rho \nabla_\sigma v^\lambda. \quad (3.28)$$

Daí,

$$[D_\alpha, D_\beta] v^\gamma = \left(K_{\alpha\mu} K_\beta^\gamma - K_{\beta\mu} K_\alpha^\gamma \right) v^\mu + \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma [\nabla_\sigma, \nabla_\rho] v^\lambda. \quad (3.29)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Como, $[\nabla_\sigma, \nabla_\rho]v^\lambda = {}^{(4)}R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma}v^\mu$ e $[D_\alpha, D_\beta]v^\gamma = {}^{(3)}R^\gamma{}_{\mu\beta\alpha}v^\mu$. Assim, concluímos que:

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\delta^\sigma {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = {}^{(3)}R^\gamma{}_{\delta\alpha\beta} + K_\alpha^\gamma K_{\delta\beta} - K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta}. \quad (3.30)$$

Essa equação é conhecida como relação de Gauss.

Se contraírmos a relação de Gauss nos índices γ e α e usarmos a identidade $\gamma_\alpha^\mu \gamma_\rho^\alpha = \gamma_\rho^\mu = \delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho$, obtemos a seguinte relação:

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}Ric_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma_\beta^\rho n^\sigma {}^{(4)}R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = {}^{(3)}Ric_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu. \quad (3.31)$$

chamamos essa equação de relação de Gauss contraída. Estamos considerando que $K_\mu^\mu = K_I^I = K$ e $K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = K_{IJ} K^{IJ}$, quando contraírmos novamente a última equação, obtemos:

$${}^{(4)}\mathcal{R} + 2 {}^{(4)}Ric_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - K_{IJ} K^{IJ}. \quad (3.32)$$

Procedendo de maneira análoga [37] mas, considerando agora o comutador entre as conexões em relação ao vetor normal $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]n^\gamma = {}^{(4)}R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta}n^\mu$, obtemos as relações de Codazzi dadas por

$$\gamma_\rho^\gamma n^\sigma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = D_\beta K_\alpha^\gamma - D_\alpha K_\beta^\gamma. \quad (3.33)$$

e sua versão contraída,

$$\gamma_\alpha^\mu n^\nu {}^{(4)}Ric_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha^\mu. \quad (3.34)$$

3.2 Geometria das Folheações

Até agora, estávamos analisando o comportamento de uma única hiperfície Σ imersa em uma variedade espaço-temporal (M, g) . Agora iremos considerar um conjunto contínuo de hiperfícies $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ que recobre a variedade como um todo M . Poderíamos nos concentrar em um amplo espectro de classes de variedades espaço-temporais com essa finalidade. Entretanto, por razões físicas iremos nos restringir aos espaços conhecidos como *globalmente hiperbólico*, que, na verdade, são os espaços de maior interesse astrofísico e cosmológico e será sobre este alicerce que construiremos nosso formalismo

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

3 + 1 da Relatividade Geral.

Primeiramente, necessitamos definir, de maneira precisa, o que vem a ser um espaço globalmente hiperbólico e o porquê de trabalharmos com tais espaços. O nome globalmente hiperbólico reside no fato de que obtemos equações de onda bem definidas nesses espaços, isto é, a equação: $\nabla^2 - \kappa \partial^2/\partial t^2$ é uma equação hiperbólica. Uma superfície de Cauchy é uma hipersuperfície do tipo-espaço Σ em M tal que toda curva causal, isto é, tipo-tempo, aberta, intersepta Σ uma única vez [37] (Fig.3.6). Essa característica das superfícies de Cauchy é bem interessante pois, a partir dessa, garantimos que não haja curvas fechadas no tempo e/ou que uma curva do tipo-tempo intersepte a hipersuperfície mais de uma vez.

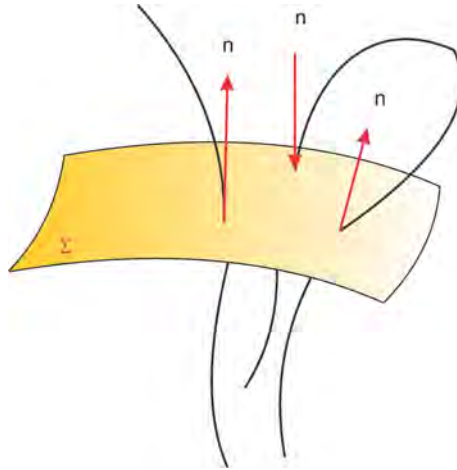


Figura 3.6: Superfície de Cauchy, uma ilustração de como curvas causais poderiam interseptá-la.

Qualquer espaço globalmente hiperbólico (M, g) pode ser foliado por uma família de hipersuperfícies $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Folheação, de modo mais simples, seria o processo de “fatiamiento” da variedade espaço-temporal, onde, em cada instante de tempo t temos uma “fatia” de espaço fixa. A título de aplicação, esse é o procedimento, heurísticamente falando, para a quantização da gravitação via laços, isto é, em cada instante de tempo temos uma geometria específica e a esta geometria espacial tentamos dar uma caracterização quântica. O processo de folheação pode ser visto na ilustração feita pela Figura 3.7.

Assim, deve existir um campo escalar suave \hat{t} sobre M , regular (possui gradiente

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

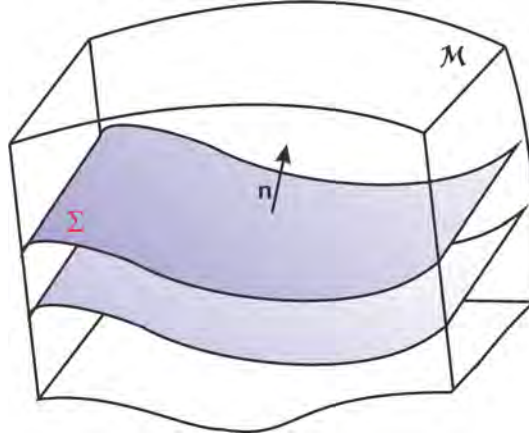


Figura 3.7: Folheação do espaço-tempo M por uma família de hipersuperfícies do tipo-espaço $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

não-nulo em todo espaço), de maneira que cada hipersuperfície seja uma “superfície” de nível desse campo escalar:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Sigma_t := \{p \in M, \hat{t}(p) = t\}. \quad (3.35)$$

como \hat{t} é regular, as hipersuperfícies são disjuntas, isto é, $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$ se $t \neq t'$. E, ainda, devemos ter que $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$.

Se observarmos, a direção do vetor tipo-tempo normal à Σ , \mathbf{n} , indica a direção de evolução temporal (do presente para o futuro). E esse, deve ser, necessariamente, colinear com o gradiente ∇t associado com o gradiente 1-forma \mathbf{dt} . Daí, podemos escrever

$$\mathbf{n} := -N\nabla t \quad (3.36)$$

com

$$N := \left(-\nabla t \cdot \nabla t \right)^{-1/2} = \left(-\langle \mathbf{dt}, \nabla t \rangle \right)^{-1/2} \quad (3.37)$$

O sinal menos é convencional para que o vetor \mathbf{n} esteja orientado na direção do futuro se o campo escalar estiver aumentando em direção ao futuro. Observe, ainda, que o valor de N garante a unitariedade de \mathbf{n} : $g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$. O campo escalar N antes definido, é conhecido como *função lapso* e, por construção, $N > 0$. Podemos definir o vetor evolução normal como o vetor normal à Σ do tipo-tempo como $\mathbf{m} := N\mathbf{n}$ e, como \mathbf{n} é um vetor unitário, a o quadrado da norma de \mathbf{m} é $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = -N^2$ e através dessa definição, podemos verificar [37,38] que uma hipersuperfície $\Sigma_{t+\delta t}$ pode ser obtida por uma

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

hiperfície vizinha Σ_t de modo que $t(p') = t(p + \delta t \mathbf{m}) = t(p) + \delta t$ como indica a Figura 3.8 Dizemos, então, que a hiperfície (Σ_t) foi Lie-arrastada através do vetor normal \mathbf{m} .

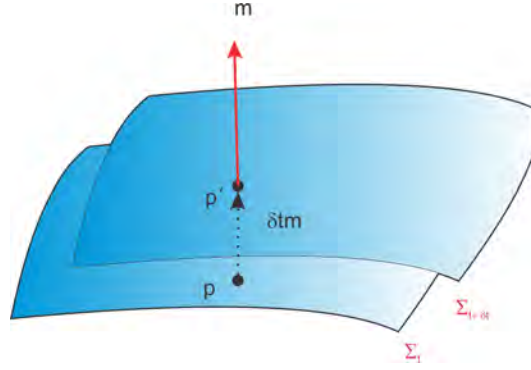


Figura 3.8: O ponto p' , obtido pelo ponto $p \in \Sigma_t$ por um deslocamento $\delta t \mathbf{m}$ pertencente a $\Sigma_{t+\delta t}$, isto é, a hiperfície Σ_t é transformada, evolui, em $\Sigma_{t+\delta t}$ por um campo vetorial (Arrasto de Lie “Lie dragging”) .

Por isso dizemos que este vetor faz o papel de vetor evolução. Uma consequência direta desse arrasto de Lie é que a derivada de Lie ao longo de \mathbf{m} de qualquer vetor em Σ_t é ainda um vetor de Σ_t , em símbolos, temos

$$\forall \mathbf{v} \in T(\Sigma_t), \quad \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \mathbf{v} \in T(\Sigma_t). \quad (3.38)$$

De certa forma, vemos que a cinemática da “fatia” geométrica está, intimamente ligada, à derivação de Lie, para mais detalhes [17, 37, 38, 47].

3.3 Decomposição 3 + 1 das Equações de Einstein

Como vimos no capítulo introdutório sobre Relatividade Geral, as equações de Einstein, em componentes, são da seguinte forma:

$${}^{(4)}Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^{(4)}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.39)$$

De maneira geométrica, isto é, sem pensarmos em um sistema local de coordenadas, temos:

$${}^{(4)}Ric - \frac{1}{2}g {}^{(4)}\mathcal{R} = 8\pi T \quad (3.40)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Agora, iremos considerar que nosso espaço-tempo (M, g) , onde g obedece as equações de Einstein³ e que este, seja globalmente hiperbólico e seja $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ uma folheação de M por uma família de hipercírculos do tipo-espaço. Primeiro, devemos pensar em como decompor em 3 + 1 o tensor energia-momento, para uma construção mais detalhada, vide [37,38]. Devemos desenvolver uma metodologia de identificação das componentes associadas ao tensor energia momento. Dessa forma, temos três maneiras distintas de projetar o tensor T ; sua projeção completa na direção normal, tangente e mista em relação às hipercírculos Σ_t . A densidade de matéria energia E é definida como uma medida feita por observadores Eulerianos [37] e, corresponde, a projeção normal, isto é, $E := T(\mathbf{n}, \mathbf{n})$. Já a densidade de momentum como uma medida de observadores Eulerianos sendo a decomposição mista $P := -T(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot))$, ou em componentes, $P_\alpha = -T_{\mu\nu} n^\mu \gamma_\alpha^\nu$. E finalmente, a projeção completa sobre a hipercírculo chamado de tensor “stress” medido, também, por observadores Eulerianos⁴ $S := \vec{\gamma}^* T$ ou, em componentes, $S_{\alpha\beta} = T_{\mu\nu} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu$ que poderia ser entendido como se tivéssemos dois vetores unitários do tipo-espaço, digamos \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , no referencial de repouso de um observador Euleriano. $S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ seria a “força” na direção de \mathbf{e}_1 agindo sobre uma superfície unitária de vetor normal \mathbf{e}_2 . Para ficar mais fácil a visualização do que estamos fazendo, podemos considerar um matriz da seguinte forma:

$$(T_{\mu\nu})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} T_{00} := E & (P_{J0})_{1 \times 3} \\ (P_{0J})_{3 \times 1} & \begin{pmatrix} S_{IJ} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Da mesma forma que o tensor energia-momento, podemos decompor as equações de Einstein de três maneiras distintas:

- Projeção Completa sobre Σ_t , aplicando-se o projetor $\vec{\gamma}^*$

Para fazermos isso, iremos recorrer a uma forma diferente de escrevermos as equações

³Estaremos tratando as equações de Einstein sem levar em conta a constante cosmológica. Um tratamento que leva isso em conta pode ser encontrado em [13,16].

⁴Como o vetor unitário \mathbf{n} é do tipo-tempo, ele pode ser considerado como uma 4-velocidade de algum observador, o qual é chamado de observador *Euleriano*.

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

de campo de Einstein que, pode ser facilmente obtida,

$$\bar{\gamma}^* {}^{(4)}Ric = 8\pi \left(\bar{\gamma}^* T - \frac{1}{2} T_\mu^\mu \bar{\gamma}^* g \right). \quad (3.41)$$

$\bar{\gamma}^* {}^{(4)}Ric$ pode ser visto em [17, 37, 38] (combinada com a equação de Gauss contraída [37]), $\bar{\gamma}^* T$ é por definição S , $T_\mu^\mu := S_I^I - E^5$, e $\bar{\gamma}^* g$ é simplesmente a 3-métrica h . Assim, temos:

$$\mathcal{L}_m \mathbf{K} = -\mathbf{D} \mathbf{D} N + N \{ \mathbf{Ric} + \mathbf{K} \mathbf{K} - 2h(\mathbf{K}, \mathbf{K}) + 4\pi[(S - E)h - 2\mathbf{S}] \} \quad (3.42)$$

ou, em componentes,

$$\mathcal{L}_m K_{IJ} = -D_I D_J N + N \{ Ric_{IJ} + K K_{IJ} - 2K_{IL} K_J^L + 4\pi[(S - E)h_{IJ} - 2S_{IJ}] \} \quad (3.43)$$

- Projeção Completamente Perpendicular a Σ_t

Lembrando que $g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$ e aplicando a equação de Einstein sobre o vetor normal \mathbf{n} em conjunto com a equação escalar de Gauss [37, 38], temos:

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \frac{1}{2} \mathcal{R} = 8\pi \mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{n}). \quad (3.44)$$

que em componentes possui a seguinte forma:

$${}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - K_{IJ} K^{IJ} = 16\pi E. \quad (3.45)$$

Essa equação é conhecida como vínculo hamiltoniano, que será justificado mais adiante.

- Projeção Mista

Finalmente, a projeção mista nos dá uma equação conhecida como vínculo do momentum, que em componente possui a seguinte forma:

$$D_J K_I^J - D_I K = 8\pi P_I \quad (3.46)$$

⁵Por abuso de notação iremos denotar o traço de \mathbf{S} e de \mathbf{T} , por S e T sem índices.

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Contudo, vemos que as equações de campo de Einstein são equivalentes a um sistema de três equações, duas das quais são, na verdade, vínculos a serem implementados.

Os sistemas obtidos nas projeções das equações de Einstein são, na realidade, equações tensoriais. Como estamos interessados em um problema de Cauchy, ou seja, um problema de valor inicial, necessitamos de equações diferenciais. Para tanto, devemos introduzir coordenadas na variedade espaço-temporal M , de uma maneira “adaptada” para a folheação $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Com efeito, para cada hiperfície Σ_t , introduz-se um sistema local de coordenadas $\{x^I\} = (x^1, x^2, x^3)$ com a exigência de que este varie de maneira suave entre hiperfícies adjacentes no tempo. Daí, podemos aproximar nosso sistema de coordenadas da variedade por $\{x^\alpha\} = (t, x^I)$, onde x^I são as coordenadas espaciais. Denotemos por $\partial_\alpha = (\partial_t, \partial_I)$ a base natural de $T_p M$. Observe que, o vetor ∂_t é tangente as linhas das coordenadas espaciais que são constantes, ou seja, as curvas de M definidas pelas coordenadas, como mostra a Figura 3.9

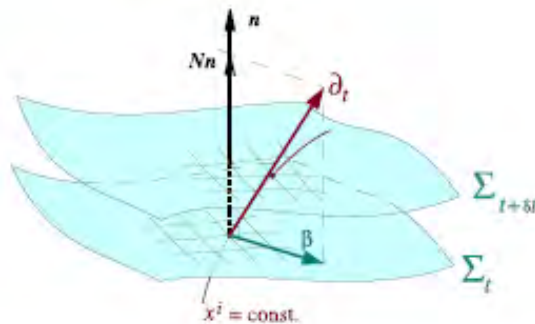


Figura 3.9: Coordenadas (x^I) sobre a hiperfície Σ_t : cada linha $x^I = \text{const.}$ atravessa a folheação $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ e define o vetor tempo e o vetor desvio β .

De certa forma, o vetor tempo ∂_t pode ser visto como um arraste de Lie definido na seção anterior, mas, em geral, os vetores ∂_t e \mathbf{m} diferem e a medida dessa diferença é conhecida como vetor desvio β , tangente a Σ_t ; para detalhes da construção algébrica de β , vide [37,38]. Assim,

$$\partial_t := \mathbf{m} + \beta, \quad \mathbf{n} \cdot \beta = 0 \quad (3.47)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Donde,

$$\partial_t = N\mathbf{n} + \beta \quad \Longrightarrow \quad n^\alpha = \left(\frac{1}{N}, -\frac{\beta^I}{N} \right) \quad (3.48)$$

No mesmo contexto, vemos que a métrica (campo) da variedade espaço-temporal, pode ser decomposta e vista como a seguinte representação matricial:

$$(g_{\alpha\beta})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{\beta^J}{N^2} \\ \frac{\beta^I}{N^2} & h_{IJ} - \frac{\beta^I \beta^J}{N^2} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Donde, obtemos que o termo de medida invariante sob difeomorfismos [3, 13, 16, 37] é dado por

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \quad g := \det(g_{\alpha\beta}), \quad h := \det(h_{IJ}). \quad (3.49)$$

Fazendo-se as devidas substituições algébricas, obtemos o seguinte sistema de equações de Einstein:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)h_{IJ} = -2NK_{IJ} \quad (3.50)$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K_{IJ} = -D_I D_J N + N\{Ric_{IJ} + KK_{IJ} - K_{IL}K_J^L + 4\pi[(S - E)]h_{IJ} - 2S_{IJ}\} \quad (3.51)$$

$${}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 - K_{IJ}K^{IJ} = 16\pi E \quad (3.52)$$

$$D_J K_I^J - D_I K = 8\pi P_I \quad (3.53)$$

Devemos notar que o sistema de equações acima, não contém derivação temporal da função lapso N ou do vetor desvio β . Em outras palavras, N e β não são variáveis dinâmicas do nosso sistema. Entretanto, isso não deveria nos surpreender tanto, pois essas variáveis estão vinculadas à escolha de um sistema local de coordenadas (t, x^I) . Por outro lado, a liberdade, no que tange a escolha de coordenadas na Relatividade Geral, implica que podemos escolher livremente essas variáveis N e β sem mudar a física do problema. Existem algumas maneiras de se avaliar e, de escolha, do lapso e desvio, como, por exemplo, as *coordenadas Gaussianas normais*; onde se faz explicitamente $\beta = 0$ e $N = 1$ como pode ser visto em [17, 37]. A questão central, no uso das coordenadas Gaussianas, reside no fato de que, chega-se à um sistema de equações que contém 6 +

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

1 + 3 = 10 equações para 6 elementos desconhecidos h_{IJ} . Assim, temos um problema com excesso de informação, a priori, mas através de alguns teoremas, principalmente o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya (veja, [37, 38]), podemos garantir esse sistema como um problema de Cauchy tratável, onde os 4 graus de liberdade excedentes são, na verdade, vínculos a serem implementados no sistema físico de interesse.

3.4 Formalismo Hamiltoniano (ADM) da Relatividade Geral

Um dos caminhos que levam a quantização de um campo, firma-se na idéia da construção de uma ação S , isto é, um funcional linear do campo e de derivadas do campo em relação a um parâmetro específico. De posse de uma ação, podemos utilizar os princípios do cálculo variacional com a finalidade de recuperarmos as equações de movimento que regem a evolução do campo analisado. Assim, obtemos a lagrangiana do sistema e por uma transformação de Legendre construímos nossa hamiltoniana. De posse da nossa função hamiltoniana temos, tanto informação do campo e de seu momento conjugado, e esse é o princípio para quantização canônica. Isso é verdade tanto para a Eletrodinâmica [35], onde temos $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, quanto na gravitação, onde a ação é conhecida como ação de Einstein-Hilbert e é da seguinte forma:

$$S = \int_{\mathcal{V}} {}^{(4)}\mathcal{R}\sqrt{-g}d^4x \quad (3.54)$$

onde \mathcal{V} é uma parte da variedade espaço-temporal M delimitada por duas hiperfícies Σ_{t_1} e Σ_{t_2} ($t_1 < t_2$) da folheação $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$

$$\mathcal{V} := \bigcup_{t=t_1}^{t_2} \Sigma_t \quad (3.55)$$

Através do desenvolvimento do formalismo 3 + 1 e da relação $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$, podemos reescrever nossa ação como

$$S = \int_{\mathcal{V}} \left[N \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K_{IJ}K^{IJ} \right) - 2\mathcal{L}_m K - 2D_I D^I N \right] \sqrt{h}d^4x \quad (3.56)$$

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

Agora, como

$$\mathcal{L}_m K = m^\mu \nabla_\mu K = N n^\mu \nabla_\mu K = N [\nabla_\mu (K n^\mu) - \underbrace{K \nabla_\mu n^\mu}_{-K}] \quad (3.57)$$

$$= N [\nabla_\mu (K n^\mu) + K^2] \quad (3.58)$$

Donde, obtemos

$$\int_{\mathcal{V}} \left[N \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K_{IJ} K^{IJ} - K^2 \right) - 2N \nabla_\mu (K n^\mu) - 2D_I D^I N \right] \sqrt{h} d^4 x \quad (3.59)$$

Mas, observe que

$$\int_{\mathcal{V}} N \nabla_\mu (K n^\mu) \sqrt{h} d^4 x = \int_{\mathcal{V}} \nabla_\mu (K n^\mu) \sqrt{-g} d^4 x = \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\partial_\mu (\sqrt{-g} K n^\mu)}_{divergencia} d^4 x$$

Como pelo formalismo lagrangiano, exigimos termos de divergência nulos, ou seja, os termos de superfície não contribuem, vemos que o termo a seguir também pode ser visto como divergência pura:

$$\int_{\Sigma_t} D_I D^I N \sqrt{h} d^3 x = \int_{\Sigma_t} \underbrace{\partial_I}_{\text{ Sist. local}} (\sqrt{h} D^I N) d^3 x$$

Assim, a ação de Einstein-Hilbert no formalismo 3 + 1 assume a seguinte forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Sigma_t} \left(\mathcal{R} + K_{IJ} K^{IJ} - K^2 \right) \sqrt{h} d^3 x \right\} dt \quad (3.60)$$

A ação acima, pode ser considerada como um funcional das variáveis de “configuração” $q = (h_{IJ}, N, \beta^I)$ que descrevem completamente a métrica do espaço-tempo $g_{\alpha\beta}$ e sua derivada temporal $\dot{q} = (\dot{h}_{IJ}, \dot{N}, \dot{\beta}^I)$: $S(q, \dot{q})$. Em particular, pode-se mostrar que a curvatura extrínseca K_{IJ} depende funcionalmente da 3-métrica da seguinte forma:

$$K_{IJ} = \frac{1}{2N} \left(h_{IL} D_J \beta^L + h_{JL} D_I \beta^L - h_{IJ} \right) \quad (3.61)$$

E da ação obtida, podemos verificar que a densidade de lagrangiana gravitacional é da

3. Formalismo 3 + 1 da Relatividade Geral

seguinte forma:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = N\sqrt{h}\left(\mathcal{R} + K_{IJ}K^{IJ} - K^2\right) \quad (3.62)$$

e que o momento canonicamente conjugado, a variável dinâmica h_{IJ} , definido como $\Pi^{IJ} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{IJ}}$ possui a forma:

$$\Pi^{IJ} = \sqrt{h}\left(Kh^{IJ} - K^{IJ}\right) \quad (3.63)$$

Finalmente, a densidade de hamiltoniana é dado, por um transformação de Legendre, por:

$$\mathcal{H} = \Pi^{IJ}\dot{h}^{IJ} - \mathcal{L} \quad (3.64)$$

De posse do formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral, seguindo o caminho natural para uma quantização canônica, o próximo passo seria o estabelecimento das relações de comutação envolvendo o campo h_{IJ} e seu momento canonicamente conjugado Π^{IJ} . A Gravitação Quântica via Laços consegue tratar dessa nova álgebra exigida para a quantização do campo e, um aspecto relacionado ao espaço de Hilbert cinemático desse modelo será o eixo temático do nosso trabalho.

Capítulo 4

Gravitação Quântica via Laços e os Frames

4.1 Espaços Moduli e a Não-Separabilidade

A Gravitação Quântica via Laços (GQL) é um modelo de quantização da gravitação einsteiniana independente de fundo. A Relatividade Geral é uma teoria de campo intrinsecamente independente de fundo. Em outras palavras, a tentativa da GQL é construir uma gravitação quântica em quatro dimensões e, diferentemente das quantizações usuais (veja por exemplo [32,33], usa-se métodos não-perturbativos (para uma construção rigorosa [48]).

O espaço quântico se mostra descrito, na GQL, em termos de uma base de estados conhecidos como estados de conexões-spin ou, estados *s-nós*, nomeados por números quânticos discretos, ou seja, existe uma bijeção entre o espaço dos estados e o conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Entretanto, essa bijeção que caracteriza o conjunto de estados como sendo *separáveis*, nem sempre se faz verdadeira. O problema surge quando temos *nós* com alta valência, isto é, quando um número suficientemente alto de “links” se encontram em um ponto de interseção, os *s-nós* perdem a sua característica discreta e passam a ser descritos por uma parametrização de moduli contínua. Esses moduli são, de certa forma, intrigantes do ponto de vista físico, pois não representam medidas físicas ou se quer são detectados pelos operadores que representam as grandezas observáveis bem como pelo operador que governa a dinâmica [45,47–49].

4. Gravitação Quântica e os Frames

Contudo, eles são responsáveis por modificar completamente a estrutura do espaço de estados difeomorficamente-invariantes, \mathcal{H}_{diff} , sendo capaz de torná-lo não-separável.

A não-separabilidade (inexistência de uma bijeção com \mathbb{N}) é, geralmente, encarada como um problema para muitos físicos em Teoria Quântica de Campos. Uma discussão interessante sobre esse aspecto é feita no livro do Wightman [57]. Nossa tarefa será apresentar alguns aspectos dessas estruturas de moduli, como elas surgem, e propor um tratamento diferenciado utilizando filtragem de sinais.

4.1.1 Grafos e os Estados Quânticos

Vimos que a relatividade geral clássica pode ser definida sobre uma variedade diferenciável quadridimensional M com uma topologia do tipo $\Sigma \times \mathbb{R}$. O campo gravitacional é, na verdade, visto como o tensor métrico g de uma variedade semi-riemanniana M , satisfazendo as equações de Einstein. A teoria hamiltoniana correspondente pode ser formulada sobre a hipersuperfície Σ , onde podemos falar de uma conexão suave 1-forma que denominaremos por A sobre $SU(2)$ [47, 48] ao longo de Σ . Seja \mathcal{C} o espaço dessas conexões A definidas em toda a hipersuperfície. Podemos definir o espaço S dos funcionais que agem em \mathcal{C} .

Seja τ_i uma base fixa para a álgebra de Lie $SU(2)$, onde tomamos $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$, como σ_i sendo as matrizes de Pauli. Temos que

$$A(\vec{\tau}) = A_a^i(\vec{\tau})\tau_i dx^a. \quad (4.1)$$

Estaremos utilizando sempre o conceito de grafo, que possui uma imensa relevância à GQL. Grafo, denotado por Γ é uma coleção finita $L(\Gamma)$ de subvariedades unidimensionais orientadas¹ de Σ , denominadas de links e denotada por l , interseccionando-se apenas nos vértices, chamados de *nós* e denotados por n , como pode ser visto na Figura 4.1.

A valência de um *nó* é o número de links que chegam a n ; onde denotaremos por \mathcal{G} o espaço de tais grafos. Os estados quânticos são limites de seqüências de funções cilíndricas [45, 47, 48], convergindo para a norma que definiremos a seguir. Uma função

¹Para uma boa definição de hipersuperfícies orientadas [1, 2, 7, 8].

4. Gravitação Quântica e os Frames

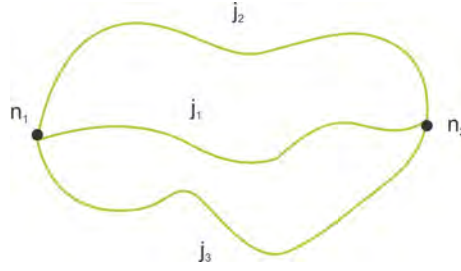


Figura 4.1: Uma conexão de spin simples com dois nós trivalentes.

cilíndrica $\Psi_{\Gamma, f} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida de modo que, dada a holonomia $U_l(A) \in SU(2)$ em relação a conexão A ao longo do link l :

$$U_l(A) \equiv \mathcal{P} \exp \int_l A, \quad (4.2)$$

onde \mathcal{P} denota um caminho ordenado. O grafo Γ define uma aplicação $p_{\Gamma} : \mathcal{C} \rightarrow [SU(2)] \times L(\Gamma)$; $A \mapsto (U_l(A))$. Fazendo-se a composição dessa aplicação com uma função complexa f avaliada sobre $[SU(2)] \times L(\Gamma)$, obtemos as funções cilíndricas, dadas por

$$\Psi_{\Gamma, f}(A) \equiv f(U_{l_1}(A), \dots, U_{l_{L(\Gamma)}}(A)). \quad (4.3)$$

Como sempre podemos escrever quaisquer duas funções cilíndricas em termos de um mesmo grafo, isto é, podemos reescrever uma função cilíndrica avaliada no grafo Γ por um outro grafo Γ' que contenha Γ , podemos definir o produto escalar do espaço de estados fazendo uso da medida de Haar [47, 48] sobre $SU(2)$.

$$\langle \Psi_{(\Gamma, f)} | \Psi_{(\Gamma, f')} \rangle \equiv \int dU_1 \dots dU_{L(\Gamma)} \overline{f(U_1, \dots, U_{L(\Gamma)})} f'(U_1, \dots, U_{L(\Gamma)}). \quad (4.4)$$

O espaço de Hilbert cinemático \mathcal{K} da GQL é definido como o espaço de Hilbert completo pela norma definida no espaço das funções cilíndricas. As transformações de calibre locais sobre $SU(2)$ agem de maneira natural sobre esse espaço de modo que os estados invariantes formam um subconjunto próprio de notado por \mathcal{K}_0 . Naturalmente, ao falarmos de espaços de Hilbert somos levados a imaginar a presença de uma base ortonormal sobre \mathcal{K}_0 que é feita pelas *conexões-spin* [47, 48]. Temos ainda que \mathcal{K}_0 possui, naturalmente, uma representação unitária sobre o grupo de difeomorfismos da

4. Gravitação Quântica e os Frames

hiperfície Σ herdada, de certa forma, da invariância sob difeomorfismos característica da Relatividade Geral [45, 47, 48]. Analogamente, os estados inavriantes sob difeomorfismos formam um subespaço \mathcal{H}_{diff} de S' (S' é o dual de S , onde $S \subset \mathcal{K}_0 \subset S'$). Esse espaço descreve os estados quânticos difeomorficamente invariantes do campo gravitacional, ou seja, os estados quânticos do espaço físico.

Fazendo-se uma análise, podemos ver que duas conexões-spin S_1 e S_2 definem estados ortogonais em \mathcal{H}_{diff} se os grafos correspondentes Γ e Γ' pertencem a classes de equivalência diferentes sobre transformações de difeomorfismo. Em outras palavras, via uma transformação suave não podemos transformar o grafo Γ em Γ' .

$$\langle S_1 | P_{diff} | S_2 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \Gamma' \neq \phi \circ \Gamma \\ \sum_k \langle S_1 | g_k | S_2 \rangle & \text{se } \Gamma' = \phi \circ \Gamma \end{cases}$$

onde P_{diff} é um operador, conjugado com um difeomorfismo, agindo nos estados quânticos e ϕ é um difeomorfismo explicitamente em Σ . Para detalhes consulte [47–49].

O problema todo surge quando tratamos com grafos com alta valência de maneira a afetar a estrutura de \mathcal{H}_{diff} . Quando isso acontece as classes de equivalência que geram grafos distintos, os *diff-nós*, formam um conjunto não-enumerável implicando na não-separabilidade de \mathcal{H}_{diff} . Desse fato emerge os espaços de *moduli* cujo comportamento estudaremos a seguir.

4.1.2 Espaços Moduli e a Estrutura de Nós

Estados quânticos do campo gravitacional são rotulados por nós com interseções na gravitação quântica via laços. Os *nós*, podem ser definidos de duas maneiras: como classes de equivalência em \mathbb{R}^3 sob uma deformação contínua da imagem do laço - “c-nós”; ou como classes de equivalência sob difeomorfismos - “d-nós”. Entretanto, essas duas definições deixam de ser equivalentes quando existe interseções. Interseções de *d-nós* são diferentes de interseções de *c-nós*. Diferentemente dos espaços de *nós* elementares, o espaço \mathcal{K}_d dos *d-nós* é não enumerável. A dimensão contínua do espaço \mathcal{K}_d é proveniente da estrutura diferencial da variedade, que implica no aparecimento de espaços tangentes T_p em pontos de interseção. Os laços definem curvas em T_p , e os difeomorfismos

4. Gravitação Quântica e os Frames

agem de maneira linear em T_p . Portanto, equivalência sobre difeomorfismos implica equivalência sob transformações lineares de T_p . Para um número muito grande de links, as transformações lineares em T_p falham em alinhar todas as curvas, porque para termos uma transformação linear entre esses espaços não podemos ter um conjunto com mais parâmetros que a dimensão do espaço vetorial considerado.

Vejam um exemplo ilustrativo. Considere um laço suave α em \mathbb{R}^3 , com um ponto de auto-interseção $p \in \mathbb{R}^3$, e assuma que α passe por p cinco vezes, de maneira que nesse ponto tenhamos cinco vetores tangentes $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5$. Admita que três desses cinco são linearmente independentes e denotemos por $\mathcal{K}_c[\alpha]$ o c-nó ao qual α pertence. Seja, agora, um laço β elemento do mesmo c-nó $\mathcal{K}_c[\alpha]$. O laço β também possuirá um ponto de interseção, digamos q , e cinco vetores tangentes $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_5$ em q . Afim de que α e β estejam no mesmo d-nó, deverá existir um difeomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformando α em β . A aplicação tangente f^* mapea vetores do espaço tangente em p , T_p , ao espaço tangente em q , T_q , e deveria alinhar os vetores tangentes \vec{v}_i em \vec{w}_i . Entretanto, f^* é uma aplicação linear feita entre espaços tridimensionais, dada pelo jacobiano da matriz de f em p dependendo de 9 parâmetros. Como as direções dos cinco vetores \vec{v}_i dependem de 10 parâmetros, vemos que não há transformação linear que possa alinhar tais vetores nos \vec{w}_i . De modo geral, α e β não irão pertencer ao mesmo d-nó, pois deverá existir algum parâmetro contínuo que seja função dos ângulos dos vetores, que seja invariante sob difeomorfismos, que distingue α de β . Essa é a raiz dos espaços moduli. Em outras palavras, vemos que nosso problema reside no fato de termos vetores que são linearmente dependentes e faz com que o problema seja mais que completo ou possua redundância (produzindo um aumento do conjunto). Como pode ser visto na ilustração da Figura 4.2. Para uma descrição formal e bem interessante do tratamento da redundância dos espaços d-nós \mathcal{K}_d vide [49–51].

De certo modo, a existência de grafos com alta valência leva o surgimento de parâmetros contínuos, que são invariantes sob difeomorfismos, caracterizando o surgimento das estruturas dos espaços *moduli*. Em outras palavras, o fato de termos mais parâmetros do que o necessário seria, desse ponto de vista, o responsável pela perda da separabilidade de \mathcal{H}_{diff} . O que se faz afim de recuperar a separabilidade é a extensão

4. Gravitação Quântica e os Frames

do conjunto de difeomorfismos, tal que, faz-se uma relaxação nas propriedades dantes exigidas afim de englobar pontos singulares. Por outro lado, devemos pensar no que essa extensão, em nível quântico, acarretaria no limite de recuperação da Relatividade Geral clássica. Nossa proposta para esse problema, alternativamente, é aplicarmos uma espécie de filtro para retirarmos os vetores redundantes que contribuem para a perda da separabilidade.

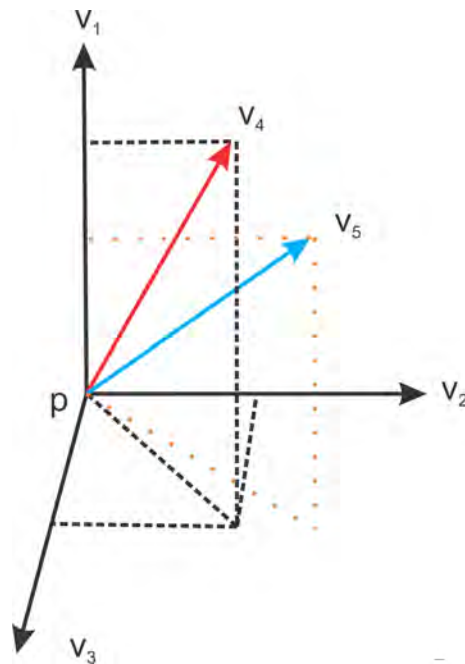


Figura 4.2: Representação da emergência dos espaços moduli ao considerarmos um ponto p em \mathbb{R}^3 possuindo vetores tangentes mais que necessários, isto é, nem todos são linearmente independentes.

4.2 Teoria Elementar de Frames

Quando estamos trabalhando com espaços vetoriais somos, sempre, levados a um conceito chave, um conjunto chamado base. De fato, através de uma base podemos expandir qualquer vetor em termos de elementos mais elementares. Muitas das dificuldades encontradas na análise de vetores mais gerais podem ser reduzidas quando descrevemos o vetor em termos desses “blocos elementares”. Entretanto, as condições para uma base são muito restritivas, isto é, exigimos que o conjunto desses vetores seja linearmente independente e, de posse do produto interno, gostaríamos que fossem

4. Gravitação Quântica e os Frames

ortogonais. Desejamos, no entanto, olhar para uma ferramenta que fosse um pouco mais flexível. Os *frames* [52–56] assumem esse papel. Um frame para um espaço vetorial, métrico, também nos permite que cada vetor do espaço seja escrito como uma combinação linear entre os elementos do frame, mas a independência linear entre os elementos do frame não é exigida. Em outras palavras, um frame poderia ser pensado como uma base mais que completa, ou seja, uma base onde acrescentamos vetores mais que o necessário.

Definição 4.2.1 *Seja E um espaço vetorial métrico de dimensão finita m . Seja o conjunto $\{e_i\}_{i=1}^m \subset E$ uma base para E , as seguintes propriedades devem ser satisfeitas:*

- (i) $E \text{ span}\{e_i\}_{i=1}^m$;
- (ii) $\{e_i\}_{i=1}^m$ é linearmente independente, isto é, se $\sum_i c_i e_i = 0 \implies c_i \equiv 0 \forall i$.

Uma consequência imediata da definição de base é que, para todo $\xi \in E$ possui uma representação unívoca em termos dos elementos da base considerada, isto é, existe coeficientes escalares unívocos $\{c_i\}_{i=1}^m$ tal que

$$\xi = \sum_i c_i e_i \quad (4.5)$$

Quando nosso espaço é munido com um produto interno, desejamos que nossos elementos sejam ortonormais:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{k,j} \quad (4.6)$$

onde $\delta_{k,j}$ é o delta de Kronecker. Temos ainda que os coeficientes da expansão são dados pelas projeções do elemento ξ ao longo de cada termo da base.

$$\xi = \sum_i \langle \xi, e_i \rangle e_i. \quad (4.7)$$

Iremos introduzir agora, a definição de frames.

Definição 4.2.2 *Uma família enumerável de elementos $\{f_i\}_{i \in I}$ em E é um frame para E se existir constantes $A, B > 0$ tal que*

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in E. \quad (4.8)$$

4. Gravitação Quântica e os Frames

Os números A e B são chamados de limites de frame. Eles não são únicos. O limite inferior de frame ótimo é o sup de todos os limites inferiores, analogamente, o limite superior de frame ótimo é dado pelo inf de todos os limites superiores.

Proposição 4.2.1 *Seja $\{f_i\}_i^m$ uma sequência em E . Então $\{f_i\}_i^m$ é um frame para um espaço vetorial $W := \text{span}\{f_i\}_i^m$.*

onde $W \subset E$, ou seja, um subconjunto próprio de E . A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [52]. Dessa proposição segue o seguinte

Corolário 4.2.1 *Uma família de elementos $\{f_i\}_{i=1}^m$ em E é um frame para E se e, só se, $\text{span}\{f_i\}_{i=1}^m = E$.*

o corolário acima, mostra que um frame pode conter mais elementos que o necessário para termos uma base, pois a única exigência feita é que os elementos gerem todo o espaço. Em particular, dado que $\{f_i\}_{i=1}^m$ seja um frame para E e $\{g_i\}_{i=1}^n$ uma coleção arbitrária de vetores em E , então, $\{f_i\}_{i=1}^m \cup \{g_i\}_{i=1}^n$ é também um frame para E . Um frame que não é uma base é chamado de mais que completo ou redundante.

Considere agora um espaço vetorial E , l -dimensional, equipado com um frame $\{f_i\}_{i=1}^m$, com $m \geq l$, e defina a aplicação:

$$T : \mathbb{C}^m \rightarrow E, \quad T\{c_k\}_{k=1}^m = \sum_{k=1}^m c_k f_k \quad (4.9)$$

T é chamado de operador pré-frame e seu adjunto é dado por

$$T^* : E \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^m \quad (4.10)$$

compondo T com seu adjunto T^* , obtemos o operador de frame, tal que

$$F : E \rightarrow F, \quad Ff = TT^* f = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle f_k. \quad (4.11)$$

Observe que em termos do operador de frame, temos

$$\langle Ff, f \rangle = \sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2, \quad \forall f \in E \quad (4.12)$$

4. Gravitação Quântica e os Frames

e assim, o limite de frame inferior poderia ser visto como um tipo de limite inferior do operador de frame. Um frame $\{f_k\}_{k=1}^m$ é dito ser *fino* se escolhermos $A = B$ na definição de frame, isto é, se

$$\sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 = A \|f\|^2 \quad (4.13)$$

note que, além de considerarmos o frame fino, estamos assumindo que estamos nos limites ótimos dados pelo sup e inf. Devemos notar, ainda, que a condição de limite superior B é sempre válida se considerarmos a desigualdade de Cauchy-Schwartz vide [52–54], a determinação de um limite inferior passa ser nossa meta. Podemos mostrar que para o caso de *frames* finos um elemento $f \in E$ pode ser representado da seguinte maneira, segundo a

Proposição 4.2.2 *Assuma que $\{f_k\}_{k=1}^m$ seja um frame fino para E com limite de frame A . Seja $F = A\mathbb{I}$ (\mathbb{I} é o operador identidade em E), assim, temos*

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in E \quad (4.14)$$

Vemos que a representação acima é bem similar à representação de uma base ortnormal com a diferença do fator $1/A$. Temos ainda um importante teorema demonstrado em [52] que diz:

Teorema 4.2.1 *Seja $\{f_k\}_{k=1}^m$ um frame para E com operador de frame F . Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i) F é inversível e auto-adjunto.
- (ii) Todo $f \in E$ pode ser representado como

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, F^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle F^{-1} f_k \quad (4.15)$$

Todo frame em um espaço de dimensão finita² contém uma subfamília que é uma base. Logo, se $\{f_k\}_{k=1}^m$ é um frame mas não uma base, existe uma sequência

²A extensão para espaços de dimensão infinita é suportada por uma gama de teoremas e os espaços de Hilbert são também factíveis do ponto de vista de frames nessa consideração.

4. Gravitação Quântica e os Frames

de elementos não nulos $\{d_k\}_{k=1}^m$ tal que $\sum_{k=1}^m d_k f_k = 0$. Daí, segue que, para todo elemento $f \in E$ podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^m \langle f, F^{-1} f_k \rangle + \sum_{k=1}^m d_k f_k \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\langle f, F^{-1} f_k \rangle + d_k \right) f_k \end{aligned}$$

Isso nos mostra que f possui muitas representações como superposição de elementos do frame. Iremos avaliar alguns exemplos, bem simples, de como usamos os frames afim de “eliminarmos”, de um certo ponto de vista, as redundâncias de bases mais que completas e, ver se isso se aplicaria no caso dos grafos de alta valência. Seja $\{e_k\}_{k=1}^2$ uma base ortonormal em um espaço vetorial bidimensional V munido de um produto interno. Seja

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = e_1 + e_2.$$

Então $\{f_k\}_{k=1}^3$ é um frame para E . Usando a definição de operador de frame,

$$Ff = \sum_{k=1}^3 \langle f, f_k \rangle f_k,$$

considerando nosso frame, obtemos que

$$Fe_1 = e_1 + e_1 - e_2 + e_1 + e_2 = 3e_1$$

e

$$Fe_2 = -(e_1 - e_2) + e_1 + e_2 = 2e_2$$

Assim,

$$F^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1, \quad F^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2$$

Por linearidade, o frame canonicamente dual é

$$\{F^{-1}f_k\}_{k=1}^3 = \left\{ \frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \right\}.$$

4. Gravitação Quântica e os Frames

Pelo Teorema acima, a representação de $f \in E$ em termos do frame é dada por

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^3 \langle f, F^{-1} f_k \rangle f_k \\ &= \frac{1}{3} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, \frac{1}{3} e_1 - \frac{1}{2} e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle f, \frac{1}{3} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \rangle (e_1 + e_2). \\ \implies f &= \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 \end{aligned}$$

O que podemos notar é que temos, inicialmente, um conjunto mais que completo do ponto vista de base. No entanto, ao tratarmos o conjunto como um *frame* e aplicando as definições à um conjunto maior, recuperamos a expansão de um vetor em termos, apenas, dos elementos da base. O mais interessante é que podemos acrescentar a uma base, um número qualquer de elementos, linearmente dependentes, que do ponto de vista de *frames*, recuperamos ou, no jargão da teoria de sinais, filtramos toda a redundância que tornava o conjunto mais que completo. Para visualisarmos melhor isso, vejamos um outro exemplo para o caso de um grafo de valência cinco como proposto na seção anterior. Consideremos o um espaço vetorial tridimensional com $\{e_k\}_{k=1}^3$ uma base e seja $\{e_k, \sum_{k=1}^3 \alpha_k e_k, \sum_{k=1}^3 \beta_k e_k\}$ um *frame*, isto é, o *frame* é a base mais dois vetores que são combinação linear dos elementos da base. Da condição de *frame*, temos:

$$\begin{aligned} A \|f\|^2 &\leq \sum_{k=1}^5 |\langle f, f_k \rangle|^2 \\ A \|f\|^2 &\leq \|f\|^2 + \sum_{k=1}^3 \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 \right) |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ A &\leq 1 + \frac{\sum_{k=1}^3 \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 \right) |\langle f, e_k \rangle|^2}{\|f\|^2}. \end{aligned}$$

Podemos ver que toda a contribuição redundante está amarrada no limite de frame, e como esse limite não é único, poderíamos tomar os limites ótimos que nesse caso corresponderia a tomar o inf dos valores $1 + \frac{\sum_{k=1}^3 \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 \right) |\langle f, e_k \rangle|^2}{\|f\|^2}$, onde, naturalmente, retiramos a informação “extra” pois nesse caso $A = 1$. Esse procedimento pode ser feito para n elementos redundantes e, o mais interessante, é que recuperamos

4. Gravitação Quântica e os Frames

a partir do limite de frame apenas as informações necessárias. Assim, se considerarmos o exemplo de um grafo com valência n qualquer em uma hiperfície tridimensional, poderíamos olhar para os vetores tangentes a um nó como formando um frame e, via o formalismo visto acima, filtrar as informações que geram a estrutura de moduli e a consequente não-separabilidade de \mathcal{H}_{diff} . Se pudermos pensar dessa forma, ao aplicarmos uma transformação linear de um espaço tangente a outro faríamos uma filtragem para possibilitar que o difeomorfismo fosse feito nos vetores das conexões-spin de alta valência.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

A princípio, vemos que o que gera a não-separabilidade do espaço de Hilbert Cinemático é, basicamente, a existência de grafos ou conexões-spin de alta valência. De fato, temos vetores que são linearmente dependentes a outros vetores e isso gera uma estrutura de *moduli* ao tentarmos aplicar uma transformação linear de difeomorfismo. Vimos que pelo formalismo de frames podemos amarrar toda a informação redundante nos limites ótimos de frame e isso seria uma espécie de filtragem. Contudo, muito trabalho ainda deve ser feito e um fato interessante que nos aponta a uma perspectiva é que ao trabalharmos com frames contínuos [53, 55, 56] o que ganhamos são as funções de Bohr [40, 56].

Apêndice A

Cálculo em Variedades

A.1 Variedades

As variedades diferenciáveis [1–5] são, de certa forma, um dos conceitos fundamentais para física e matemática. Estamos sempre trabalhando com as propriedades dos espaços euclidianos n -dimensionais equipados com uma métrica plana positiva-definida. Espaços com geometria planar possuem um papel fundamental para o desenvolvimento e abordagem física. Entretanto, existem outros tipos de espaços, como uma esfera ou um elipsóide, que de maneira intuitiva se mostram “curvos” ou topologicamente mais complicados, sobre os quais gostaríamos de realizar as mesmas operações (diferenciação, integração, etc.). Para atacarmos esse problema os matemáticos desenvolveram a noção de variedades, que correspondem aos espaços que podem ser curvos e topologicamente complicados no caráter global. Entretanto, localmente se assemelham ao \mathbb{R}^n . Com essa característica das variedades, podemos analisar funções nesses espaços convertendo-as, localmente, em funções no espaço euclidiano. Interessante notar que, o processo de análise local das variedades, ou seja, descrevê-las como funções no \mathbb{R}^n nos leva a idéia de parametrização. Por outro lado, a teoria é feita de modo que a escolha das coordenadas, para nossa análise, seja irrelevante, em outras palavras, existe uma arbitrariedade na escolha das coordenadas na teoria das variedades: *todos os sistemas de coordenadas são igualmente válidos*. Para vermos como isso funciona, consideremos a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Podemos parametrizar a superfície S^2 , entre outras possibilidades, por dois sistemas de coordenadas - coordenadas polares e projeção

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

estereográfica. As coordenadas polares θ e ϕ são definidas por

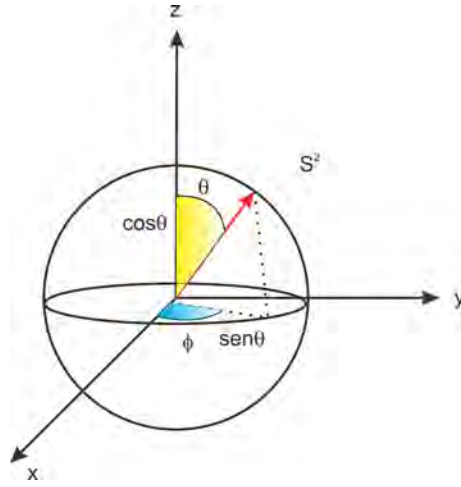


Figura A.1: Parametrização via coordenadas polares.

$$x = \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad y = \text{sen}\theta \cos \phi, \quad z = \cos \theta \quad (\text{A.1})$$

com ϕ elemento do intervalo $[0, 2\pi]$ e θ elemento de $[0, \pi]$. Observe que podemos inverter as equações, donde obtemos:

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado, a projeção estereográfica temos que $N = (0, 0, 1) \in S^2$ seu pólo norte. A projeção estereográfica $\xi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para todo ponto $x \in S^2 - \{N\}$, $\xi(x)$ é o ponto em que a semi-reta \overrightarrow{Nx} (Os pontos da semi-reta são da forma $N + t(x - N)$ com $t > 0$) corta o plano que identificamos como sendo o \mathbb{R}^2 assim, obtemos a seguinte parametrização para um ponto $P(x, y, z)$ qualquer sobre a esfera:

$$\xi(x) = \frac{x}{1-z}, \quad \xi(y) = \frac{y}{1-z} \quad (\text{A.3})$$

Observe que os dois sistemas de coordenadas são correlacionados da seguinte forma

$$\xi(x) = \cot \frac{\theta}{2} \cos \phi, \quad \xi(y) = \cot \frac{\theta}{2} \text{sen}\phi \quad (\text{A.4})$$

Essa arbitrariedade inerente ao processo de parametrização, ou melhor, a liberdade de

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

escolha da forma com a qual iremos medir distância está em harmonia com o princípio físico básico: *um sistema físico se comporta da mesma forma quaisquer que sejam as coordenadas que iremos usar para descrevê-lo.* De fato, a escolha subjetiva das coordenadas não pode interferir na objetividade de um fenômeno natural.

Definição A.1.1 M é uma variedade m -dimensional se

- (i) M é um espaço topológico ¹;
- (ii) M é munido de uma família de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$;
- (iii) $\{U_i\}$ é uma família de conjuntos abertos que recobre todo o conjunto M , isto é, $\bigcup_i U_i = M$. φ_i é um homeomorfismo de U_i em um subconjunto aberto U'_i de \mathbb{R}^m ; e
- (iv) Dados U_i e U_j tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o mapeamento $\alpha_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é infinitamente diferenciável, isto é, $\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^\infty$.

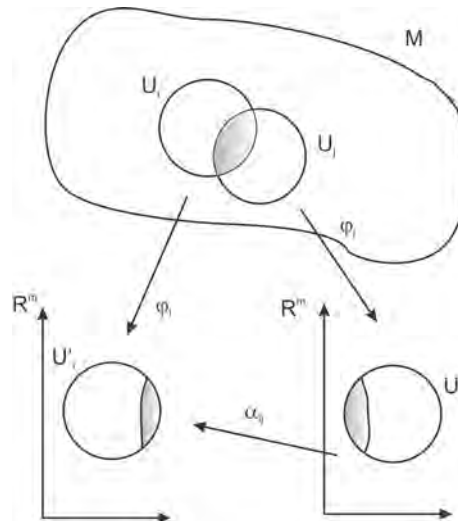


Figura A.2: Um homeomorfismo φ_i levando U_i em um subconjunto aberto U'_i fornecendo coordenadas a um ponto $p \in U_i$.

O par (U_i, φ_i) é chamado de uma *carta* ao passo que a família $\{(U_i, \varphi_i)\}$ é chamado um *atlas*. O subconjunto U_i é chamado de *vizinhança coordenada* e, φ_i é

¹Para uma definição precisa sobre Espaços Topológicos [10,11].

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

chamado de *função coordenada* ou, apenas, *coordenada*. O homomorfismo φ_i é representado por m funções $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$. O conjunto $\{x^\mu(p)\}$ é, por abuso de linguagem, chamado de coordenada. Um ponto $p \in M$ existe independente da escolha das coordenadas, cabe a nós rotular o ponto através de um determinado sistema de coordenadas. Note que, os itens (i) até (iii) nos diz respeito a exigência de localidade euclidiana, ou seja, na vizinhança imediata do ponto, o conjunto se comporta como um espaço euclidiano via o homeomorfismo. Observe ainda que, não há exigência quanto ao caráter global de M se assemelhar ao \mathbb{R}^m .

Um exemplo típico desse fenômeno pode ser visto diariamente, pois aqui na Terra vivemos como se ela não fosse globalmente curva, ela se mostra, localmente, plana. Em outras palavras, só enxergamos uma Terra curva ao olharmos de fora dela, ao avaliarmos sua curvatura extrínica pois sua curvatura intrínica, localmente, é desprezível. Se U_i e U_j se intersectam, dois sistemas de coordenadas podem ser designados para analisar pontos em $U_i \cap U_j$. O axioma (iv) garante a transição de um sistema para outro via um mapeamento suave (\mathcal{C}^∞). O mapeamento φ_i nos fornece m valores coordenados x^μ ($1 \leq \mu \leq m$) ao ponto $p \in U_i \cap U_j$, enquanto φ_j fornece y^ν ($1 \leq \nu \leq m$) ao mesmo ponto e a transição de y para x , $x^\mu = x^\mu(y)$ é obtida por m funções de m variáveis. As funções de transformação de coordenadas $x^\mu = x^\mu(y)$ são dadas pelo mapeamento $\alpha_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$.

A.1.1 Cálculo em Variedades

A base para uso das variedades diferenciáveis reside no fato de que, localmente, elas se assemelham ao \mathbb{R}^m e, portanto, as idéias usuais do cálculo desenvolvidas em \mathbb{R}^m podem ser utilizadas. O caráter suave das transformações de coordenadas nos informa sobre a independência da escolha das coordenadas. A fim de alcançarmos a física que rege a Relatividade Geral necessitamos de um conceito, fundamental, que desenvolveremos: **Difeomorfismos**. Assim como a necessidade de definirmos grandezas como vetores, tensores, curvas, etc. sobre nossa variedade, nos possibilitará construir equações diferenciais regidas por esses elementos.

Considere um mapeamento definido por $f : M \rightarrow N$ de uma variedade m -

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

dimensional M a uma variedade n -dimensional N . Um ponto $p \in M$ é mapeado em um ponto $f(p) \in N$, como mostra a figura abaixo.

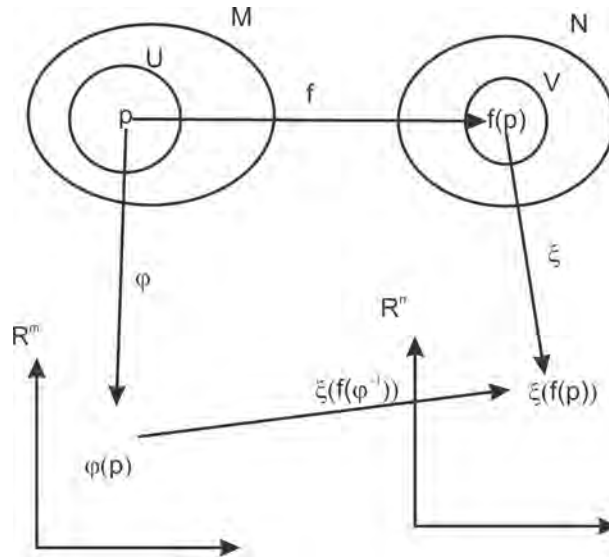


Figura A.3: Mapeamento $f : M \rightarrow N$ possuindo a representação em coordenadas $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Tome uma *carta* (U, φ) sobre M e (V, ξ) sobre N , donde $p \in M$ e $f(p) \in N$. Observe que o mapeamento possui a seguinte representação em coordenadas:

$$\xi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{A.5})$$

Se escrevermos, em termos das coordenadas de \mathbb{R}^m , $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ e o ponto $\xi(f(p)) = \{y^\alpha\}$, vemos que $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é, na verdade, uma função vetorial avaliada, no ponto considerado, da forma $y^\alpha = \xi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ de m variáveis. Se $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$, é \mathcal{C}^∞ com relação a cada x^μ , logo, f é dita ser diferenciável no ponto p ou no ponto $x = \varphi(p)$. Mapas diferenciáveis são também chamados de suave. Observe que ao exigirmos a diferenciabilidade (\mathcal{C}^∞), está em concordância com a suavidade da função de transição α_{ij} . Para a uma demonstração da arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas com o mapeamento veja [3–5]. Fazendo-se uso dessas considerações podemos definir um conceito primordial para a *Geometrodinâmica*, assim temos a seguinte definição:

²Usaremos, às vezes, esse abuso de notação $y = f(x)$ ou $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$, quando soubermos quais coordenadas estamos usando em M e N

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

Definição A.1.2 Seja $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo³ e ξ and φ sistemas de coordenadas como antes definido. Se $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é inversível e tanto $y = \xi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ quanto $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \xi^{-1}(y)$ são C^∞ , f é chamado um **difeomorfismo** e M é dito ser difeomorfo a N ou vice-versa, denotamos por $M \equiv N$.

Vemos que para o caso de variedades que são difeomorfas as dimensões devem ser coincidentes, ou seja, $\dim M \equiv \dim N$ se $M \equiv N$. Interessante observarmos que os difeomorfismos geram uma classe de equivalência de maneira que seja possível *deformar* um objeto em outro de maneira *suave*. Dois espaços que são difeomorfos, são considerados como sendo a mesma variedade, topologicamente falando. Existe diferença na geometria global, mas ao analisarmos, ou melhor, para observadores dentro das variedades, que é nosso interesse físico, não conseguimos visualizar diferença. Assim, uma esfera pode ser deformada suavemente em um cubo e observadores tanto em um objeto (esfera) quanto no outro (cubo) irão concordar com a física descrita. Em outras palavras, *as leis da natureza são invariantes sob uma transformação de difeomorfismo*⁴; essa foi uma das idéias que guiou Einstein à Relatividade Geral.

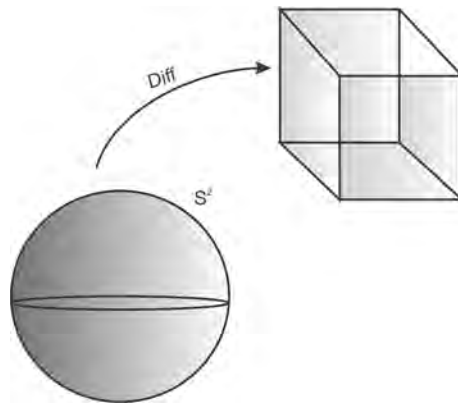


Figura A.4: Representação esquemática do processo de deformação via difeomorfismo.

Agora, iremos analisar classes de mapeamentos, chamadas *curvas* e *funções*. Uma curva aberta em uma variedade m -dimensional M é um mapeamento $c : (-\lambda, \lambda) \rightarrow M$, onde $(-\lambda, \lambda)$ é um intervalo onde $-\lambda < 0 < \lambda$. A definição de curva em variedades

³Homeomorfismo se difere bastante de difeomorfismo pois a exigência sobre o mapeamento é mais fraca, isto é, exigimos apenas continuidade tanto da ida quanto da volta.

⁴Em algumas literaturas, menos rigorosas, a invariância sob difeomorfismos é conhecida como invariância sob **Transformações Gerais de Coordenadas**.

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

segue por analogia as curvas planas ou espaciais, em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 respectivamente [2]. Sobre uma carta (U, φ) , uma curva $c(t)$ possui a seguinte representação em coordenadas: $x = \varphi \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Uma ilustração desse mapeamento pode ser vista na Figura A.4. Uma função f em uma variedade M é um mapeamento suave de M para a reta real, veja a figura A.5 para uma ilustração. Dada uma carta (U, φ) , a representação de f em um sistema de coordenadas, particular, é dado por $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a qual é uma função, valorada no ponto p de m variáveis, descritas por $\{x^\mu\}$. Denotaremos funções diferenciáveis em M por $\mathcal{F}(M)$. Além dos conceitos de curvas e funções em variedades, existem grandezas, na maioria dos casos, que possuem direção e sentido para serem completamente caracterizadas. Para obtermos uma análise física desses tipos de fenômenos, em espaços curvos, necessitamos de uma definição precisa sobre o comportamento de *campos vetoriais* e *tensoriais* sobre M .

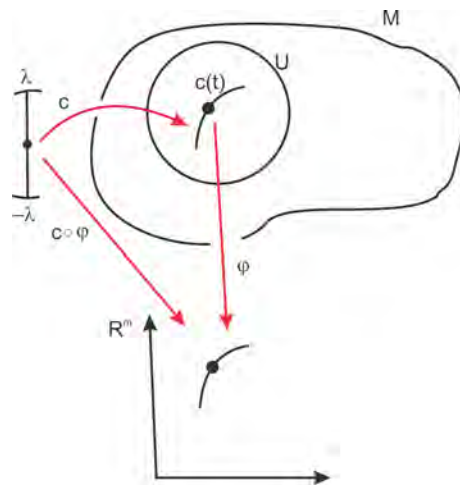


Figura A.5: Representação esquemática de uma curva em uma variedade m -dimensional.

Geralmente, a idéia inicial que temos de um vetor associa-se, sempre, a um segmento de reta orientado ou, uma “flexa”, que sai da origem de um determinado sistema de coordenadas e conecta algum ponto do espaço. Esse conceito encaixa-se perfeitamente quando estamos lidando com espaços Euclidianos e Semi-Euclidianos (Minkowskiano), pois o transporte paralelo de vetores pode ser executado sem nenhuma dificuldade e a presença de um sistema de coordenadas já é algo intrínseco em espaços com comportamento planar. Com efeito, operações de diferenças de vetores,

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

situados em pontos distintos, processa-se, trivialmente, via um transporte paralelo, veja a figura A.6. Precisamos, então, responder a pergunta: como podemos entender e definir vetores e derivadas direcionais em variedades, sendo que esse conceito inicial não faz sentido em um espaço curvo? Em variedades, um vetor será identificado como sendo o *vetor tangente* a uma curva em M .

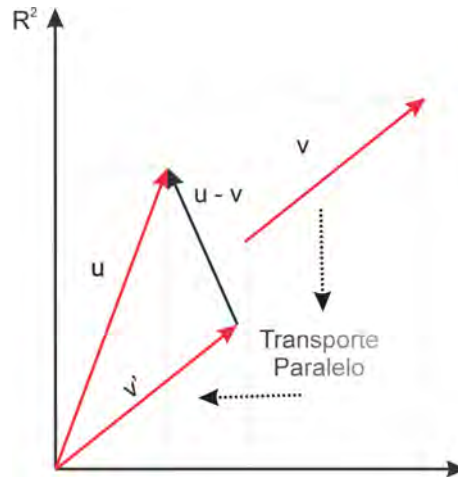


Figura A.6: Diferença entre vetores mediada por um transporte paralelo em \mathbb{R}^2 .

Os vetores tangentes sobre M generalizam a idéia de reta tangente a uma curva, como no caso do Cálculo de uma única variável. Para definirmos um vetor tangente, precisamos definir uma curva $c : (-\lambda, \lambda) \rightarrow M$ e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Definiremos o vetor tangente no ponto $c(0)$ como sendo a *derivada direcional* de uma função $f(c(t))$ ao longo da curva $c(t)$ no ponto $t = 0$. A taxa de variação da função $f(c(t))$ avaliada no ponto $t = 0$ ao longo da curva é dado por:

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\text{A.6})$$

Em termos de um sistema de coordenadas local, obtemos

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (\text{A.7})$$

A derivada $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ significa, precisamente, $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1}(x))}{\partial x^\mu}$.

Em outras palavras, $\frac{df(c(t))}{dt}$ no ponto $t = 0$ é obtido pela aplicação do operador

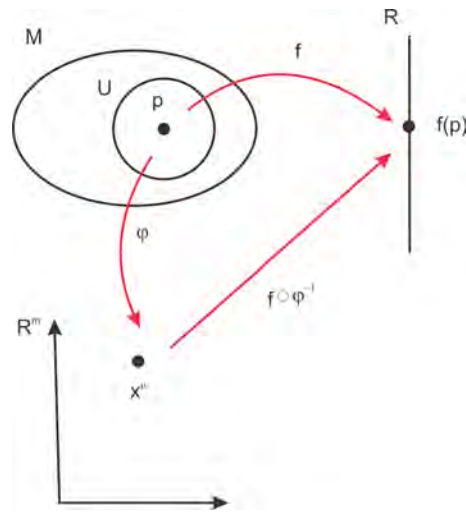


Figura A.7: Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em sua representação em coordenadas.

diferencial X em f , onde

$$X = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \quad \left(X^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \right) \quad (\text{A.8})$$

Isto é,

$$\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv X \circ f \equiv X[f] \quad (\text{A.9})$$

Note que, a última igualdade define a aplicação de X , isto é, $X \circ f$. Definiremos, agora, $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ como sendo o vetor⁵ tangente a M no ponto $p = c(0)$ ao longo da direção dada pela curva $c(t)$.

Observe que, passando pelo mesmo ponto $p \in M$ existem uma infinidade de curvas que nos fornecem vetores tangentes, via a derivada direcional à curva, em direções distintas, de modo que, podemos pensar em um conjunto, ou ainda, um espaço vetorial responsável por conter, em cada ponto $p \in M$, esses vetores tangentes. De fato, todos os vetores tangentes ao ponto p formam um espaço vetorial [3, 13–15] que chamamos de **espaço tangente** a M no ponto p , denotado por $T_p M$. Naturalmente, para desenvolvermos a álgebra associada a esses espaços, necessitaremos dos conceitos fundamentais de base. Usaremos a notação, geralmente empregada nos livros sobre

⁵Em algumas literaturas ⁶, mais precisas, a definição é feita como operador de vetor tangente, pois ele sempre age em alguma função teste nesse caso nas funções que parametrizam a curva.

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

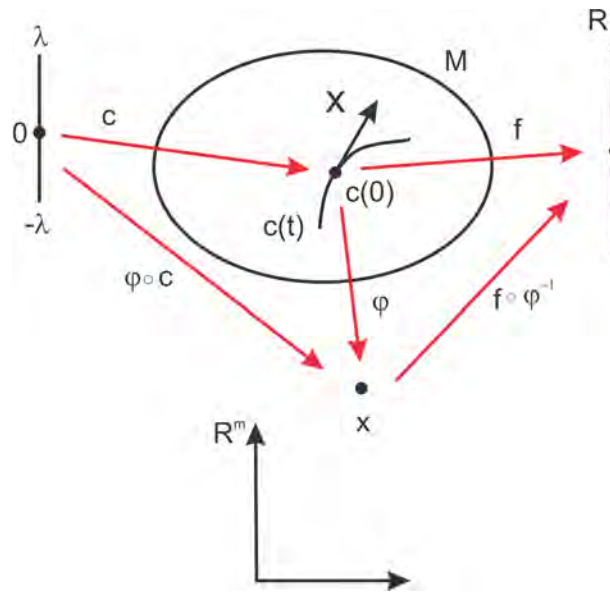


Figura A.8: Uma curva c e uma função f definem um vetor tangente ao longo dessa em termos da derivada direcional.

Relatividade Geral [13, 16–19], para nos referirmos aos vetores que formam uma base para T_pM . Consideraremos, então, os vetores $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ($1 \leq \mu \leq m$) como sendo a base para T_pM . A base $\{e_\mu\}$ é conhecida como **base coordenada**, de maneira que, dado um vetor $V \in T_pM$ podemos descrevê-lo como $V = V^\mu e_\mu$, os números V^μ ⁷ são chamados as componentes do vetor V em relação a base coordenada e_μ . Por construção, podemos notar que o vetor X existe independente da especificação das coordenadas locais que iremos usar para descrevê-lo. Contudo, essa arbitrariedade, sobre a escolha do sistema de coordenadas, que é intrínseca aos vetores nos leva a ideia sobre propriedades de transformações das componentes do vetor, em linguagem mais precisa, ideia de *transformações lineares*⁸ para mudança de base. Assim, seja $p \in U_i \cap U_j$ e consideremos as aplicações $x = \varphi_i(p)$, $y = \varphi_j(p)$. Podemos expressar um vetor $X \in T_pM$ de duas formas distintas,

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad e \quad X = \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (\text{A.10})$$

⁷Convencionaremos o uso de índice sobrescrito como referindo-se sempre a componentes de vetores e índice subscrito para funcionais lineares (1 – forma) que veremos adiante.

⁸Não podemos confundir as transformações de mudança de base que ocorrem localmente, isto é, sobre o mesmo ponto da variedade que são lineares, com as mudanças gerais de coordenadas (Difeomorfismos).

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

Como o vetor X , independe da escolha das coordenadas isso nos mostra que as componentes X^μ e \tilde{X}^μ são relacionadas pela seguinte transformação

$$\tilde{X}^\mu = X^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \quad \text{pois} \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \quad (\text{A.11})$$

Note que as componentes dos vetores se transformam de modo a cumprir a exigência de invariância do vetor sob uma escolha de sistema de coordenadas para analisá-lo.

Nota A.1.1 *Adiantamos que a base para descrevermos o espaço tangente T_pM não precisa ser, necessariamente, $\{e_\mu\}$. Veremos que as bases, ou descrições chamadas de vierbein⁹ ou dreibein serão largamente usadas na aproximação Hamiltoniana advinda dos processos de folheação do espaço-tempo.*

No intuito de podermos trabalhar com esses vetores de forma a termos como mensurar valores escalares, ou seja, tirarmos informações desses vetores, tal que, possamos associá-las a um número. Vamos introduzir o conceito de espaço dual [2–4, 7] onde iremos conseguir, através de seus elementos, fazer operações com vetores e obter um escalar. De fato, como o espaço T_pM é um espaço vetorial, existe um espaço dual a T_pM dos *Funcionais Lineares*, denotado por T_p^*M , de modo que, sua atuação nos elementos de T_pM produz um escalar. Um elemento $\omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é também chamado de **vetor dual** ou, no contexto de formas diferenciais [1, 3, 4, 12], uma **1-forma**. Um exemplo simples de uma 1 – *forma* é o diferencial df de uma função $f \in \mathcal{F}(M)$. Lembremos que a ação de um vetor V sobre uma função f é $V \circ f = V^\mu \partial f / \partial x^\mu \in \mathbb{R}$. Definiremos a ação de $df \in T_p^*M$ sobre $V \in T_pM$ como se segue

$$\langle df, V \rangle \equiv V \circ f = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.12})$$

Observe que podemos expressar nosso diferencial df em termos de coordenadas, mesmo estando alicerçados na arbitrariedade das coordenadas, como físicos sempre precisamos medir, então, é de suma importância sua representação em coordenadas. Tome uma carta (U, φ) onde $p \in U \subset M$ e $x^\mu \in \mathbb{R}^m$, tal que, $x = \varphi(p)$ como $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$, naturalmente, iremos considerar $\{dx^\mu\}$ como sendo uma base para o

⁹Vierbein, palavra alemã que significaria, ao pé da letra, quatro pernas e dreibein, três pernas.

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

espaço dual T_p^*M . Temos ainda que, essa é uma base dual desde que tenhamos

$$\langle dx^\mu, e_\mu \rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu. \quad (\text{A.13})$$

Com efeito, uma 1 – forma qualquer ω pode ser escrita como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (\text{A.14})$$

Onde os termos ω_μ são as componetes do funcional ω . Tome um vetor $V = V^\mu e_\mu$ e considere, ainda, uma 1 – forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. O produto interno $\langle, \rangle : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\langle \omega, V \rangle = \langle \omega_\mu dx^\mu, V^\nu e_\nu \rangle = \omega_\mu V^\nu \langle dx^\mu, e_\nu \rangle = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu. \quad (\text{A.15})$$

Nota A.1.2 Observe que na definição de produto interno, acima, estamos lhe dando com dois objetos ligeiramente diferentes. O produto interno deve ser feito por um elemento do espaço dos Funcionais Lineares com um elemento do espaço vetorial tangente T_pM . Na próxima seção, definiremos o conceito de métrica que nos permitirá conectar esses espaços, a priori, não relacionados.

Assim como na Relatividade Especial, necessitamos de elementos maiores que vetores para comportar alguns tipos de objetos físicos, tais como, Energia-Momentum, o Tensor Eletromagnético $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu$, etc. Tais objetos são generalizações de vetores, sob uma determinada transformação, denominados *Campos Tensoriais*. Um tensor do tipo (q, r) é um objeto multilinear que mapeia q elementos do espaço dual T_p^*M e r elementos do espaço tangente T_pM a um número real. Iremos denotar o conjunto dos tensores do tipo (q, r) no ponto $p \in M$ por $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$. Um elemento de $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ é escrito em termos de uma base coordenada da seguinte forma:

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r} \quad (\text{A.16})$$

Devemos ter em mente que tanto, vetores, tensores, etc., são quantidades matemáticas que representam grandezas físicas. No entanto, vemos que, por construção, tais

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

quantidades existem independentes da escolha das coordenadas, ou seja, os vetores e tensores são invariantes sob transformações de coordenadas, porém, suas componentes podem não o ser. A definição, física, dessas quantidades requer a presença de uma transformação, assim, quando dizemos que uma dada quantidade é um vetor ou um escalar devemos especificar em relação a que transformação: rotação, Lorentz, Difeomorfismos, etc. Um exemplo interessante sobre esse aspecto, reside no fato do tensor de Christoffel se transforma sob difeomorfismos como um verdadeiro tensor, entretanto, suas componentes, conhecidas como símbolos de Christoffel, não se transformam como um tensor, mas a definição formal, do tensor, em si, é feita de forma que ele se transforme como tensor. Assim, a definição das componentes de um tensor qualquer do tipo (q, r) é feita ao consideramos a aplicação deste em uma base desejada, como se segue. Considere uma base para $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ formada pelos elementos do espaço dual e tangente $\{e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_q}, dx^{\nu_1}, \dots, dx^{\nu_r}\}$, as componentes de um tensor $T \in \mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ é dada por

$$T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \left(e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r} \right) \left(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q} \right) \quad (\text{A.17})$$

A ação do tensor sobre qualquer vetor ou vetor dual, é mediada pelo produto interno definido anteriormente, de forma que,

$$\left(dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r} \right) \left(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r} \right) \equiv \langle dx^{\nu_1}, e_{\alpha_1} \rangle \otimes \dots \otimes \langle dx^{\nu_r}, e_{\alpha_r} \rangle \Rightarrow \delta_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\alpha_r}^{\nu_r}. \quad (\text{A.18})$$

Obviamente essa definição nos leva a uma construção linear de

$$\otimes^q T_p^* M \otimes^r T_p M \implies \mathbb{R} \quad (\text{A.19})$$

Assim, como um exemplo de aplicação, considere $V_i = V_i^\mu e_\mu$ ($1 \leq i \leq r$) e uma forma $\omega_i = \omega_{i\mu} dx^\mu$ ($1 \leq i \leq q$). A ação de um tensor T sobre eles nos leva a um valor numérico da seguinte maneira

$$T(\omega_1, \dots, \omega_q; V_1, \dots, V_r) = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_q} \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \dots V_r^{\nu_r}. \quad (\text{A.20})$$

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

Vimos que a presença do espaço tangente é algo de suma importância para podermos tratar do cálculo em variedades. Nesse contexto, vemos que podemos definir mapeamentos que podem nos levar a outras variedades ou, até mesmo, sair de um espaço vetorial tangente T_pM e ser mapeado em um número ou na reta real. Naturalmente, poderíamos nos perguntar se as propriedades de curvas e seus respectivos vetores tangentes, bem como sua decomposição em coordenadas, teriam como ser de certa forma mantidas nos espaços imagem. Em outras palavras, haveria alguma maneira, precisa, de “induzir”, nos mapeamentos das variedades, espaços tangentes imagem sobre os pontos imagiados, por exemplo, por um função infinitamente diferenciável, isto é, $f \in \mathcal{C}^\infty$? Veremos que isso é possível via o que denominaremos de mapas induzidos e *pullback*. Vejamos uma figura ilustrativa sobre o proposto.

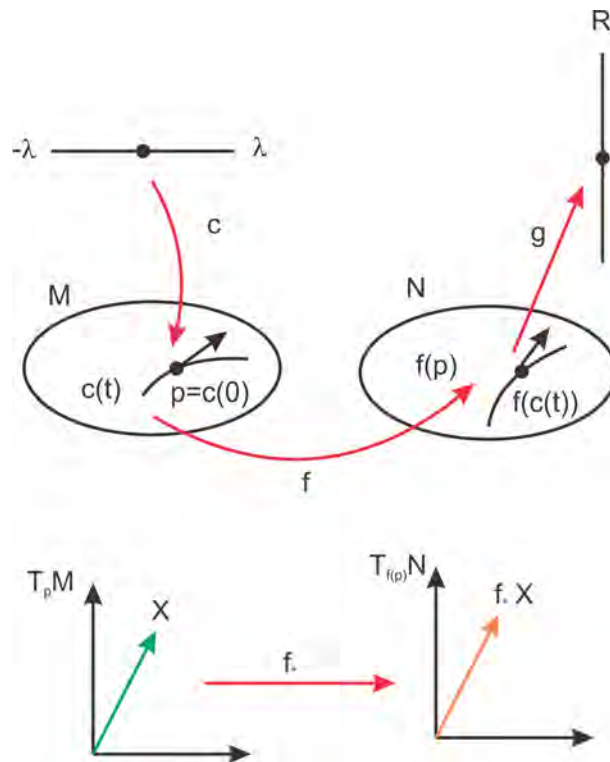


Figura A.9: Um mapeamento $f: M \rightarrow N$ induz um mapeamento diferencial $f_*: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$.

Um mapeamento suave $f: M \rightarrow N$ induz, naturalmente, um mapeamento f_*

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

chamado de *mapeamento diferencial*, como visto na figura acima, e é definido por

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N. \quad (\text{A.21})$$

Para obtermos uma forma explícita para f_* devemos recorrer a definição de vetor tangente, caracterizado pela derivada direcional, ao longo da curva. Se $g \in \mathcal{F}(N)$, temos que $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$. Considere um vetor $V \in T_p M$ agindo sobre a função definida pela composição $g \circ f$ levando a um número real $V \circ (g \circ f)$. Defina $f_* V \in T_{f(p)} N$ como

$$(f_* V) \circ g \equiv V \circ (g \circ f) \quad (\text{A.22})$$

Agora, tomemos uma carta (U, φ) sobre a variedade M e (Q, ξ) sobre N ,

$$(f_* V) \circ (g \circ \xi(y)) \equiv V \circ (g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)) \quad (\text{A.23})$$

onde estamos considerando $x = \varphi(p)$ e $y = \xi(f(p))$. Seja $V = V^\mu e_\mu$ e $f_* V = W^\alpha e_\alpha$. Portanto, pela definição acima, temos:

$$W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [g \circ \xi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)].$$

Observe que, se tomarmos um caso particular, onde $g = y^\alpha$, obtemos uma relação entre as componentes dos vetores W^α e V^μ ,

$$W^\alpha = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}(x). \quad (\text{A.24})$$

Vemos, então, que a matriz que relaciona a mudança de coordenadas para o vetor na respectiva aplicação entre variedades, a priori distintas, nada mais é que o Jacobiano da aplicação $f : M \rightarrow N$. O mapeamento f_* é estendido, de forma natural, para tensores do tipo $(q, 0)$, $f_* : \mathcal{T}_{0,p}^q(M) \rightarrow \mathcal{T}_{0,f(p)}^q(N)$. Consideremos um exemplo ilustrativo sobre essas aplicações. Seja (x^1, x^2) e (y^1, y^2, y^3) coordenadas para as variedades M e N , respectivamente, tome $V = a e_1 + b e_2$ sendo o vetor tangente no ponto p caracterizado pelas coordenadas (x^1, x^2) . Considere $f : M \rightarrow N$ uma aplicação cuja representação

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

em coordenadas seja $y = (x^1, x^2, \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2})$. Assim,

$$f_*V = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} e_\alpha = ae_1 + be_2 - \left(a \frac{y^1}{y^3} + \frac{y^2}{y^3} \right) e_3. \quad (\text{A.25})$$

Assim, como uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre duas variedades induz um mapeamento entre os elementos dos respectivos espaços tangentes, é natural, imaginarmos que essa aplicação induziria um mapeamento entre os espaços duais associados as variedades no ponto a ser valorado a aplicação. Com efeito, o mapeamento definido como

$$f^* : T_p^*N \rightarrow T_{f(p)}^*M \quad (\text{A.26})$$

Observe que f_* vai na mesma direção que a aplicação f , entretanto, f_* vai em direção contrária, ou seja, ele é induzido de forma que sua imagem pertença ao espaço dual do T_pM por isso o denominaremos *pullback*. A vantagem de definirmos o pullback está intimamente ligada a necessidade de termos como calcular o produto interno, antes definido. Podemos, então, avaliar objetos, a priori em espaços distintos, através da definição de pullback. Levando elementos do espaço dual T_p^*N de volta a variedade M , para podermos contraí-los com uma determinada quantidade vetorial. Assim, consideremos um vetor $V \in T_pM$ e $\omega \in T_{f(p)}^*N$, o pullback de ω mediado pelo mapeamento f^* é definido por

$$\langle f^*, V \rangle = \langle \omega, f_*V \rangle \quad (\text{A.27})$$

Um esboço do que é feito através do pullback pode ser visto na figura abaixo.

Observe que até agora, ao trabalharmos com as propriedades do cálculo em variedades só nos atemos ao processo de avaliação de funções, vetores, funcionais lineares e tensores em um dado ponto. No entanto, gostaríamos de avaliar grandezas vetoriais que se situam em pontos distintos de uma variedade ou, até mesmo, pensar na evolução de um determinado vetor tangente. Devemos, então, buscar por uma ferramenta que nos propicie compreender o comportamento deste com respeito a mudança de direcionamento da curva. Afim de obtermos informações de vetores em pontos distintos temos duas opções, inserir uma *conexão* (que veremos na próxima seção) ou fazer uso

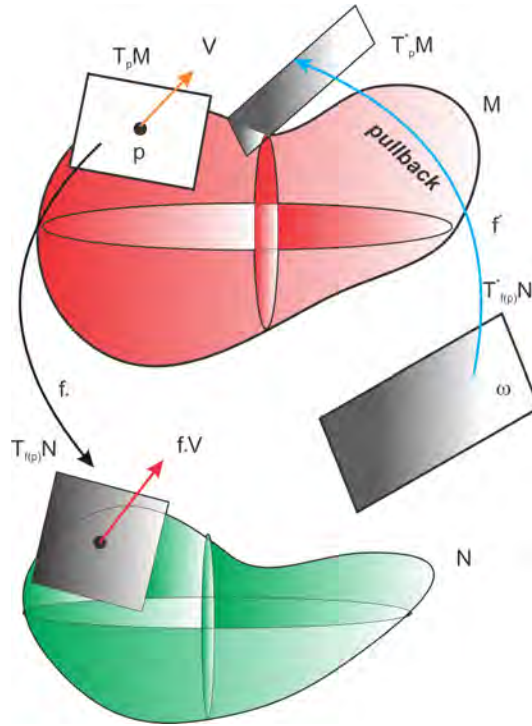


Figura A.10: Processo de mapeamento induzido e seu respectivo *pullback*.

do que chamamos de *fluxo* e a respectiva *derivada de Lie*¹⁰. Um campo vetorial sobre a variedade M é obtido, tomando-se um vetor tangente $\mathbf{v}|_p$ em cada ponto $p \in M$. Na maioria das vezes iremos considerar apenas uma vizinhança de algum ponto, ao invés da variedade inteira. Uma outra maneira de visualizarmos um campo vetorial é imaginar que nossa variedade é preenchida por curvas, não-intersectantes, parametrizadas através dos pontos da variedade; veja a figura abaixo.

Seja X um vetor em M . Uma curva¹¹ definida pelo vetor X , isto é, as linhas de fluxo geradas pelo vetor X é dada pelo vetor tangente de $c(t)$ em cada ponto $x(t)$, ou seja, $X|_x$. Tome uma carta (U, φ) , obtemos então que

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu|_{p=x(t)} \quad (\text{A.28})$$

Agora que introduzimos o conceito de fluxo, iremos precisar avaliar diferença de ve-

¹⁰A derivada de Lie será muito empregada quando fizermos a decomposição das Equações de Einstein em $3 + 1$ na aproximação hamiltoniana.

¹¹Estaremos considerando em nossos cálculos curvas regulares [2, 4, 7], isto é, em cada ponto da curva exigimos que $\frac{dc(t)}{dt} \neq 0$.

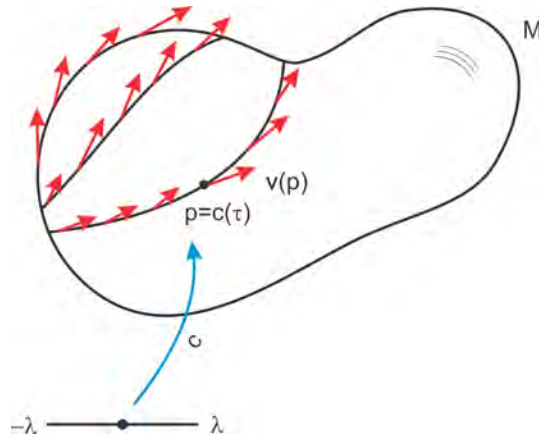


Figura A.11: Um campo vetorial \mathbf{v} tangente a curvas, que são as linhas de fluxo do vetor \mathbf{v} . Em cada ponto p , o vetor $\mathbf{v}(p)$ é elemento do espaço tangente T_pM .

tores que se situam em pontos distintos de uma curva gerada pela linha de fluxo de um determinado vetor tangente. Para isso iremos fazer uso da derivada de Lie. Antes de introduzirmos uma definição a respeito dessa maneira de computar diferenças, devemos definir o comutador entre dois vetores e algumas proposições a respeito. *Uma abordagem alternativa é dada em [3], onde se leva em conta a consideração que o fluxo pode ser visto como um gerador de transformações de um grupo de um parâmetro.* Iremos apresentar as propriedades da derivada de Lie e suas implicações de uma maneira axiomática, seguindo [16]. Com efeito, vimos que um campo vetorial \mathbf{v} pode ser considerado como um operador diferencial agindo em funções como $\mathbf{v} : f \mapsto \mathbf{v} \circ f$. Naturalmente, poderíamos considerar o comutador entre dois desses tais operadores,

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ f \equiv \mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ f) - \mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ f). \quad (\text{A.29})$$

Isso nos leva a um resultado que é novamente uma derivação, isto é, um operador diferencial de primeira ordem agindo sobre funções, mesmo, a priori, parecendo que $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ f$ envolve derivadas de segunda ordem sobre f . Contudo, a operação $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ f$ é equivalente a algum campo vetorial agindo em f . Esse vetor denotado por $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ é chamado o comutador entre \mathbf{u} e \mathbf{v} . Segue, então, as proposições sobre o comutador.

Proposição A.1.1 (a) *Segue da definição do comutador que ele satisfaz as pro-*

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

propriedades de linearidade e a regra de Leibnitz¹². Por essa razão, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ é um campo vetorial.

(b) As componentes c^α do comutador $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ em termos das componentes u^α e v^β em um sistema local de coordenadas dado pela base $\{e_\alpha\}$, são dadas pela expressão

$$([\mathbf{u}, \mathbf{v}])^\beta \equiv c^\beta = u^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} - v^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}. \quad (\text{A.30})$$

(c) Se $e_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ forem as coordenadas dos vetores da base definidas por uma carta (U, φ) levando a um sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$, então $[e_\alpha, e_\beta] = 0$.

Demonstração (a) As propriedades de linearidade são óbvias; a regra não trivial é a de Leibnitz. Para verificarmos a regra de Leibnitz, calculemos $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ (fg)$, onde iremos considerar f e g sendo \mathcal{C}^∞ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ (fg) &= \mathbf{u} \circ (g\mathbf{v} \circ f + f\mathbf{v} \circ g) - \mathbf{v} \circ (g\mathbf{u} \circ f + f\mathbf{u} \circ g) \\ &= g\mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ f) + f\mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ g) - g\mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ f) - f\mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ g) + (\mathbf{u} \circ g)(\mathbf{v} \circ f) \\ &\quad - (\mathbf{u} \circ f)(\mathbf{v} \circ g) - (\mathbf{v} \circ g)(\mathbf{u} \circ f) - (\mathbf{v} \circ f)(\mathbf{u} \circ g) \\ &= ([\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ f)g + f[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \circ g. \end{aligned}$$

(b) De maneira direta podemos usar a representação em bases coordenadas e_α

¹²A regra de Leibnitz em relação a campos vetoriais é dada por $\mathbf{v} \circ (fg) = (\mathbf{v} \circ f)g + f\mathbf{v} \circ g$.

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

donde obtemos:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u}, \mathbf{v}] &= \sum_{\alpha, \beta} (u^\alpha \partial_\alpha)(v^\beta \partial_\beta) - \sum_{\alpha, \beta} (v^\alpha \partial_\alpha)(u^\beta \partial_\beta) \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} u^\alpha v^\beta e_\alpha e_\beta + \sum_{\alpha, \beta} \left(u^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) e_\beta \\
 &\quad - \sum_{\alpha, \beta} v^\alpha u^\beta \partial_\alpha \partial_\beta - \sum_{\alpha, \beta} \left(v^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right) e_\beta \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} \left(u^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} - v^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right) e_\beta \equiv \sum_{\beta} c^\beta e_\beta.
 \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ é, de fato, um operador diferencial de primeira ordem, e também nos fornece uma expressão para suas componentes $c^\beta = u^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} - v^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}$.

(c) Para funções suaves (\mathcal{C}^∞) $f(x^1, \dots, x^n)$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} f = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f$$

De acordo com um teorema muito bem conhecido no cálculo de várias variáveis [7, 9].

Portanto, concluímos que as bases coordenadas e_α comutam entre si. \square

Agora que já definimos como o comutador entre dois vetores age em funções, iremos introduzir de maneira axiomática, isto é, iremos assumir algumas propriedades desejáveis para essa operação. Lembremos que um campo vetorial \mathbf{v} age como uma derivada direcional sobre funções escalares. A *derivada de Lie* $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ com respeito a um campo vetorial \mathbf{v} é uma operação diferencial muito importante e pode ser aplicada tanto em escalares como tensores. Depois iremos dar uma interpretação geométrica para $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$.

Gostaríamos que $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ agisse da maneira usual que as derivadas direcionais agem sobre funções escalares f ,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} f = \mathbf{v} \circ f \tag{A.31}$$

Além disso, $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ deveria possuir as seguintes propriedades, linearidade e Leibnitz, porém,

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

de maneira que seja aplicável a tensores arbitrários A, B :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(A + B) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(A) + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(B), \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(A \otimes B) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(A) \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(B), \quad (\text{A.33})$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(A \circ B) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(A) \circ B + A \circ \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(B), \quad (\text{A.34})$$

Onde $A \otimes B$ é o produto tensorial¹³ e $A \circ B$ quaisquer pares de tensores A e B . Como veremos mais adiante, essas propriedades definirão de maneira única a ação de $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ sobre qualquer tensor. Consideremos f como uma função escalar e \mathbf{u}, \mathbf{v} sendo vetores, esperamos que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} \circ f) = [\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})] \circ f + \mathbf{u} \circ \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f)$$

Usando a propriedade dada pela Eq.(A.35), podemos reescrever a equação acima como

$$\mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ f) = [\mathcal{L}_{\mathbf{v}}] \circ f + \mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ f)$$

Assim, obtemos

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})] \circ f = \mathbf{v} \circ (\mathbf{u} \circ f) - \mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ f) = [\mathbf{v}, \mathbf{u}] \circ f.$$

Em outras palavras, a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ de um campo vetorial \mathbf{u} é, em prática, nada mais que o comutador entre os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} ,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\mathbf{v}, \mathbf{u}] = -\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}.$$

Em termos da notação de índices, obtemos para um determinado sistema local de coordenadas, as componentes da derivada de Lie como

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})^\alpha = \sum v^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} - u^\beta \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (\text{A.35})$$

É importante observarmos que a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ possui uma dependência nas derivadas do vetor que gera o fluxo, sobre o qual, executamos a diferença entre

¹³Para uma definição precisa sobre produtos tensoriais vide [4, 12, 22].

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

vetores. Poderíamos dizer que, do ponto de vista matemático, a derivada de Lie não é local, ou seja, ela se aplica dentro de um *comprimento característico* e não depende exclusivamente do ponto mas, do ponto e de uma vizinhança imediata. Em particular, se \mathbf{u} , \mathbf{v} são campos vetoriais e ξ é uma função escalar temos

$$\mathcal{L}_{\xi\mathbf{v}}\mathbf{u} = \xi\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - (\mathbf{u} \circ \xi)\mathbf{v}.$$

Para mostrarmos essa propriedade, devemos usar o fato da antisimetria do comutador junto com a regra de Leibnitz para $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi\mathbf{v}}\mathbf{u} &= [\xi\mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \xi\mathbf{v}] = -\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\xi\mathbf{v}) \\ &= -\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\xi)\mathbf{v} - \xi\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \\ &= -(\mathbf{u} \circ \xi)\mathbf{v} + \xi\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\end{aligned}$$

Finalmente, iremos agora entender como se processa a derivação de Lie para um caso mais geral de tensores e formas e concluiremos com uma interpretação geométrica sobre o que a derivada de Lie realmente faz. Considere, agora, uma 1 – *forma* ω e um campo vetorial \mathbf{u} . Baseados no último axioma sobre a derivada de Lie, temos que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega \circ \mathbf{u}) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega) \circ \mathbf{u} + \omega \circ \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}).$$

Por outro lado, $\omega \circ \mathbf{u}$ é uma função escalar, assim pela Eq.(A.35) obtemos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega \circ \mathbf{u}) = \mathbf{v} \circ (\omega \circ \mathbf{u}).$$

Daí, a derivada de Lie de uma 1 – *forma* ω em relação a um campo vetorial \mathbf{v} é também uma 1 – *forma* $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\omega$ que age em um vetor arbitrário \mathbf{u} da seguinte maneira

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\omega) \circ \mathbf{u} = \mathbf{v} \circ (\omega \circ \mathbf{u}) - \omega \circ [\mathbf{v}, \mathbf{u}].$$

Para um determinado sistema local de coordenadas, obtemos a seguinte notação em

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

índices, lembrando que, \circ , é uma alusão ao produto interno entre formas e vetores, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \circ (\omega \circ \mathbf{u}) &= \mathbf{v} \circ (\omega_\alpha u^\nu \langle dx^\alpha, e_\nu \rangle) = v^\beta \partial_\beta (\omega_\alpha u^\alpha). \\ &= v^\beta \partial_\beta \omega_\alpha u^\alpha + v^\beta \omega_\alpha \partial_\beta u^\alpha.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\omega \circ [\mathbf{v}, \mathbf{u}] &= \langle \omega_\mu dx^\mu, (v^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta v^\alpha) e_\alpha \rangle \\ &= \omega_\alpha v^\beta \partial_\beta u^\alpha - \omega_\alpha u^\beta \partial_\beta v^\alpha.\end{aligned}$$

Com efeito, obtemos, em notação de componentes, sendo que $(\mathcal{L}_\mathbf{v}\omega) \circ \mathbf{u} = (\mathcal{L}_\mathbf{v}\omega)_\mu u^\alpha \delta_\mu^\alpha$:

$$(\mathcal{L}_\mathbf{v}\omega)_\mu = v^\beta \partial_\beta \omega_\mu + \omega_\mu \partial_\beta v^\beta. \quad (\text{A.36})$$

A ação da derivada de Lie sobre tensores arbitrários pode ser obtida de maneira análoga, utilizando-se dos axiomas e as decomposições em sistemas de coordenadas. Como um exemplo, consideremos T sendo uma forma bilinear com valores vetoriais, isto é, T é um tensor misto do tipo $(1, 2)$, ou ainda, $T(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é um vetor. Percebemos, então, que a notação em índices para esse tensor poderia ser $T_{\alpha\beta}^\lambda$. Portanto, a derivada de Lie $[\mathcal{L}_\mathbf{w}T](\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é definida como

$$[\mathcal{L}_\mathbf{w}T](\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{w}, T(\mathbf{u}, \mathbf{v})] - T([\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}) - T(\mathbf{u}, [\mathbf{w}, \mathbf{v}]).$$

Em notação de índice, temos

$$(\mathcal{L}_\mathbf{v}T)_{\alpha\beta}^\lambda = v^\mu \partial_\mu T_{\alpha\beta}^\lambda + T_{\alpha\mu}^\lambda \partial_\beta v^\mu + T_{\mu\beta}^\lambda \partial_\alpha v^\mu - T_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu v^\lambda.$$

A derivada de Lie possui propriedades especiais quando lhe damos com vetores que constituem as bases coordenadas locais que podem ser expressas pela seguinte proposição

Proposição A.1.2 *Seja $\{x^\mu\}$ coordenadas locais de uma determinada variedade e con-*

Apêndice A: Variedades Diferenciáveis.

sideremos a base padrão $\{\partial/\partial x^\mu\} \equiv \{e_\mu\}$ e $\{dx^\mu\}$ no espaço tangente e cotangente, respectivamente. Temos

- (a) A derivada de Lie das bases coordenadas em relação a outro elemento da base ou de uma 1-forma são identicamente nulas.

$$\mathcal{L}_{e_\mu}(e_\nu) = 0, \quad \mathcal{L}_{e_\mu}(dx^\nu) = 0.$$

- (b) Um tensor de rank arbitrário (m, n) descrito por um sistema local de coordenadas possui a seguinte decomposição em componentes. Considere, em particular, um tensor T do tipo $(1, 2)$ representado por $T_{\beta\gamma}^\alpha$, escrito por

$$T = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} T_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma.$$

Se for conhecido que $\mathcal{L}_{e_{x^1}} T = 0$, significa que as componentes $T_{\beta\gamma}^\alpha$ são independentes da coordenada x^1 .

A demonstração dessa proposição é bem direta e pode ser encontrada em [16].

Para podermos ver de maneira geométrica o funcionamento de uma derivada de Lie, iremos considerar dois fluxos distintos que usaremos a notação $\sigma(s, x)$ e $\tau(t, x)$, onde s e t são os respectivos parâmetros da curva. Podemos ver que a derivada de Lie mede a diferença de um vetor em um ponto da curva com um vetor transportado ao longo da curva $\sigma(s, x)$ como mostra a figura abaixo.

De maneira geométrica podemos ver que o comutador associado à derivada de Lie nos mostra a não comutatividade entre os fluxos gerados pelos vetores considerados. Seja $\sigma(s, x)$ e $\tau(t, x)$ dois fluxos gerados por campos vetoriais X e Y . Se movermos um deles por um parâmetro infinitesimal ε ao longo do fluxo σ , depois por δ ao longo de τ , assim a diferença entre as coordenadas desses dois pontos é proporcional à derivada de Lie. Podemos imaginar que os pontos da vizinhança ao redor do ponto inicial é transportada através das linhas de fluxo desejado a um ponto nas proximidades; vemos que essa vizinhança é, de certa forma, deformada ao longo do transporte. Vejamos a figura A.13.

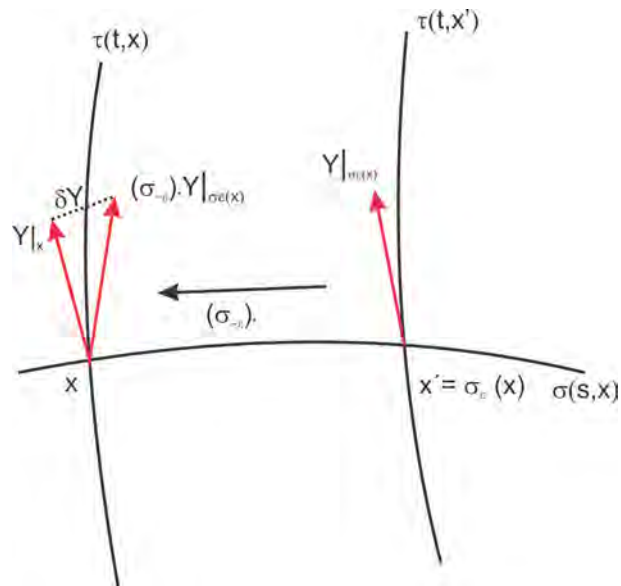


Figura A.12: Para compararmos um vetor $Y|_x$ com um vetor, sob a mesma curva, $Y|_{\sigma_\epsilon(x)}$, o último deve ser transportado de volta ao ponto x pelo mapeamento $(\sigma_{-\epsilon})_*$.

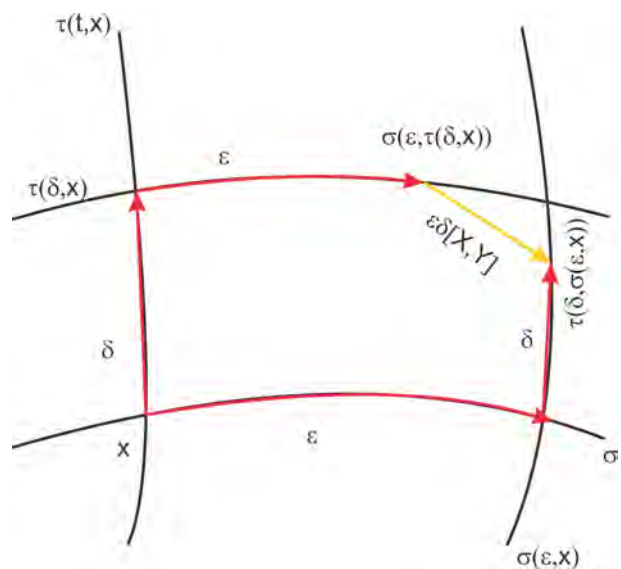


Figura A.13: A derivada de Lie $[X, Y]$ nos fornece informação sobre a quantidade que falta para fecharmos o paralelogramo.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Spivak; “*O Cálculo em Variedades*”, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro (2003).
- [2] M. P. do Carmo; “*Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*”, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2010).
- [3] M. Nakahara; “*Geometry, Topology and Physics*”, IOP Publishing, London (2003).
- [4] B. O’Neill; “*Semi-Riemannian Geometry*”, Academic Press, University of California, Los Angeles (1983).
- [5] B. Felsager; “*Geometry, Particles, and Fields*”, Springer, New York (1997).
- [6] E. L. Lima; “*Análise Real volume 1*”, IMPA, Rio de Janeiro (2009).
- [7] E. L. Lima; “*Análise Real volume 2*”, IMPA, Rio de Janeiro (2009).
- [8] E. L. Lima; “*Análise Real volume 3*”, IMPA, Rio de Janeiro (2009).
- [9] E. L. Lima; “*Análise no Espaço R^n* ”, IMPA, Rio de Janeiro (2009).
- [10] E. L. Lima; “*Espaços Métricos*”, Projeto Euclides, Rio de Janeiro (2009).
- [11] G. Bachman, L. Narici; “*Functional Analysis*”, Dover, New York (2000).
- [12] H. Flanders; “*Differential Forms*”, Dover, New York (1989).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [13] S. M. Carroll; “*An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*”, Addison Wesley, San Francisco (2004).
- [14] H. Ohanian, R. Ruffini; “*Gravitation and Spacetime*”, W. W. Norton and Company, New York (1994).
- [15] B. F. Schutz; “*A First Course in General Relativity*”, Cambridge University Press, United Kingdom (2004).
- [16] S. Winitzki; “*Advanced General Relativity: Lecture notes*”, Draft, www.gnu.org/copyleft/fdl.html, (2007).
- [17] E. Poisson ; “*An Advanced Course in General Relativity*”, Draft, Department of Physics, University of Guelph (2002).
- [18] L. Landau, E. Lifchitz; “*Teoria do Campo*”, Hemus, São Paulo (2004).
- [19] J. Stewart; “*Advanced General Relativity*”, Cambridge University Press, New York (1991).
- [20] P. A. M. Dirac; “*General Theory of Relativity*”, John Wiley and Sons, New York (1975).
- [21] R. M. Wald; “*General Relativity*”, The Chicago University Press, Chicago (1984).
- [22] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis; “*The Large Scale Structure of Space-Time*”, Cambridge University Press, New York (1973).
- [23] R. K. Sachs, H. Wu; “*General Relativity for Mathematicians*”, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [24] F. U. Coelho, M. L. Lourenço; “*Um Curso de Álgebra Linear*”, edusp, São Paulo (2007).
- [25] V. Iório; “*EDP: Um curso de Graduação*”, IMPA, Rio de Janeiro (2010).
- [26] J. B. Neto; “*Matemática para Físicos com Aplicações*”, Livraria da Física, São Paulo (2010).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [27] A. Deriglazov; “*Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism*”, Springer, Berlin (2010).
- [28] J. B. Neto; “*Mecânica: Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*”, Livraria da Física, São Paulo (2004).
- [29] N. A. Lemos; “*Mecânica Analítica*”, Livraria da Física, São Paulo (2007).
- [30] S. Gasiorowicz; “*Quantum Physics*”, Wiley, New jersey (2003).
- [31] L. E. Ballentine; “*Quantum Mechanics: A Modern Development*”, World Scientific, London (1998).
- [32] L. Landau, E. Lifshitz; “*Quantum Electrodynamics*”, Butterworth-Heinemann, Burlington (1982).
- [33] F. Schwabl; “*Advanced Quantum Mechanics*”, Springer, Berlin (2008).
- [34] M. L. Boas; “*Mathematical Methods in the Physical Sciences*”, Wiley, New York (2006).
- [35] J. D. Jackson; “*Classical Electrodynamics*”, Wiley, New York (1999).
- [36] A. F. R. T. Piza; “*Mecânica Quântica*”, edusp, São Paulo (2009).
- [37] E.ourgoulhon; “*3 + 1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*”; arXiv: gr-qc/0703035v1 (2007).
- [38] S. Dengiz; “*3 + 1 Orthogonal and Conformal Decomposition of the Einstein Equation and the ADM Formalism for General Relativity*”; arXiv: gr-qc/1103.1220v1 (2011).
- [39] D. C. M. Mendonça, “*Quantização de Laços no Modelo BF em 2 + 1 Dimensões*”, Dissertação de Mestrado, UFES (2010).
- [40] J. A. Lourenço, “*Quantização do Modelo de Jackiw-Teitelboim no Gauge Temporal via o Formalismo de Laços.*”, Tese de Doutorado, UFES (2009).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [41] T. P. Shestakova; “*Hamiltonian formulation for the theory of gravity and canonical transformations in extended phase space*”; arXiv: gr-qc/11020097v1 (2011).
- [42] N. Bodendorfer ,T. Thiemann; “*New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions II. Lagrangian Analysis*”; arXiv: gr-qc/1105.3704v1 (2011).
- [43] N. Bodendorfer ,T. Thiemann; “*New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions II.Hamiltonian Analysis*”; arXiv: gr-qc/1105.3703v1 (2011).
- [44] C. Rovelli; “*Zakopane lectures on loop gravity*”; arXiv: gr-qc/1102.3660v5 (2011).
- [45] H. Sahlmann; “*Loop Quantum Gravity :a short review*”; arXiv: gr-qc/1001.4188v3 (2011).
- [46] C. Kiefer; “*Quantum Gravity*”, Oxford University Press, New York (2007).
- [47] C. Roveli; “*Quantum Gravity*”, Cambridge University Press, New York (2004).
- [48] T. Thiemann; “*Modern Quantum Canonical General Relativity*”, Cambridge University Press, New York (2007).
- [49] W. Fairbairn, C. Rovelli; “*Separable Hilbert Space in Loop Quantum Gravity*”; arXiv: gr-qc/0403047v2 (2004).
- [50] N. Grot, C. Rovelli; “*Moduli-Space and Structure of Knots with Intersections*”; arXiv: gr-qc/9604010v1 (2008).
- [51] J. Pullin; “*Knot Theory and Quantum Gravity in Loop Space: A Primer*”; Lecture Notes, UU-REL-93/1/9 hep-th/9301028 (1992).
- [52] O. Christensen; “*Frames and Bases: An Introductory Course*”, Birkhäuser, Berlin (2008).
- [53] H. Sahlmann; “*Multipliers for Continuous Frames in Hilbert Spaces*”; arXiv: math.FA/1111.2440v1 (2011).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [54] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer; “*A Class of Nonharmonic Fourier Series*”; Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 72, No. 2 (1952), pp.341-366, American Mathematical Society: <http://www.jstor.org/stable/1990760>
- [55] F. Vides; “*On the Approximation of contractive semigroups of operators in discretizable Hilbert Spaces*”; arXiv:math.NA/1012.5106v1 (2010).
- [56] R. Joveini, M. Amini; “*Yet another generalization of frames and Riesz bases*”, Involve: A journal of mathematics, v2, No. 4 (2009).
- [57] A. S. Wightman, R. F. Streater; “*PCT, Spin and Statistics, and All That*”, W. A. Benjamin, New York (1964).